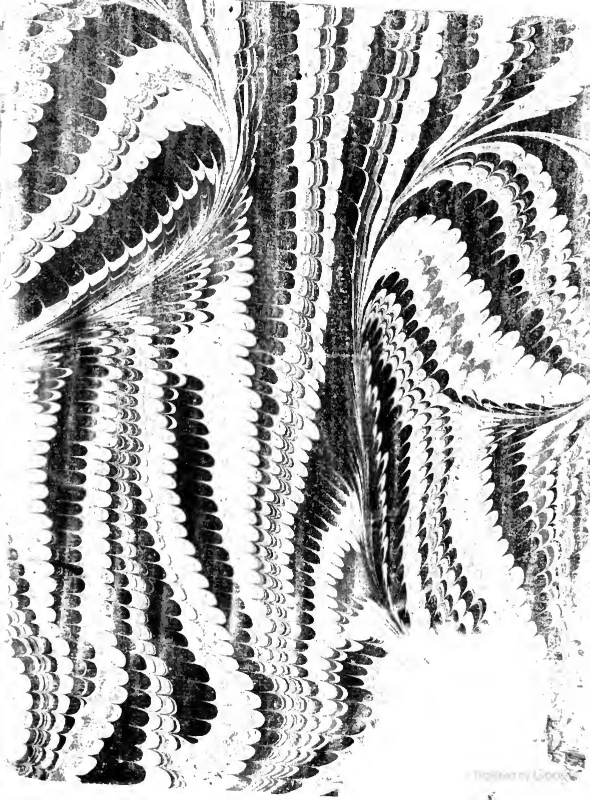




ANALISE DES INFINIMENT PETITS,

COMPRENANT

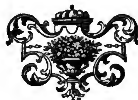
LE CALCUL INTEGRAL dans toute ſon étenduë;

AVEC SON APPLICATION AUX QUADRATURES, RECTIFICATIONS, CUBATURES, CENTRES DE GRAVITE', DE PERCUSSION, &c. DE TOUTES SORTES DE COURBES.

Par M. STONE, de la Societé Royale de Londres:

SERVANT DE SUITE AUX INFINIMENT PETITS DE M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL:

Traduit en François par M. RONDET, Maître de Mathématiques.



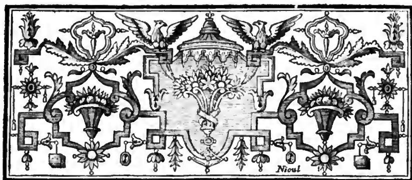


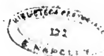
A PARIS,

Chez { JULIEN-MICHEL GANDOUIN, Quai de Conti, aux trois Vertus: ET PIERRE-FRANCOIS GIFFART, ruë Saint Jacques, à Sainte Thereſe.

M. D.C C. X X X V.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.





DISCOURS PRÉLIMINAIRE,

SERVANT DE SUPPLEMENT

A la Préface qui est à la tête de l'Analyse des Infiniment Petits de M. le Marquis DE L'HÔPITAL.



L y a bien des années que l'*Analyse des Infiniment Petits de M. le Marquis* DE L'HÔPITAL, attendoit une seconde Partie pour remplir son titre, & former un Ouvrage complet. Cet illustre Auteur dans l'ingénieuse *Préface* de cette Analyse, nous apprend qu'il avoit eû dessein de composer cette seconde Partie qui concerne le *Calcul integral* ; mais qu'il avoit cessé d'y penser, depuis que le célebre *M. Leibnis* lui avoit fait sçavoir qu'il comptoit don-

ner ce morceau dans un Ouvrage qu'il méditoit sur *la science de l'Infini*.

M. Leibnis promettoit volontiers des Ouvrages. Il avoit assez de facilité de génie pour en concevoir l'idée, & pour en former même, comme d'un premier coup d'œil, tout le plan général dans sa tête. C'est dommage qu'il n'ait eû le tems d'en executer peut-être aucun hors *sa Theodicée* qui n'est pas ce qu'il pouvoit faire de mieux. Mais, sans parler des autres projets de M. Leibnis, on peut douter si celui dont il s'agit ici, étoit mûr pour le tems auquel il le promettoit, & où M. de l'Hôpital avoit voulu l'entreprendre.

Le Calcul differentiel étoit facile à éclaircir, ou même assez éclairci dès ce tems-là. Il ne contient en soi aucune vraye difficulté. Il est comme *lineaire* & du *premier ordre des Problêmes*, n'atteignant qu'aux premieres *affections exterieures & lineaires des Courbes*, aux tangentes, sous-tangentes, perpendiculaires, sous-perpendiculaires, diametres, axes, asymptotes, dévelopées, points simples ou doubles, de courbure, d'inflexion, de reflexion, en un mot, *aux modifications des circonferences exterieures*. Ce calcul même est absolument fini, les Infiniment Petits s'y détruisant à cause de l'expression relative & fractionnaire $dx : dy$ qui est une grandeur finie.

Le principe très-simple de ce calcul va à tout, & sa regle unique n'a point d'exception, & n'est arrêtée dans la *differentiation*, ni par les fractions, ni par les complexes, ni par les radicaux. D'ailleurs divers Auteurs, particulierement *MM. Bernoulli* avoient

ſuffiſament remanié cette partie, qui étoit à proprement parler la *partie de M. Leibnis*, ſans oublier *M. de Fermat, premier calculateur des Infiniment Petits*, la partie, en un mot, des François, des Allemands, & de tout le continent de l'Europe.

Mais *le Calcul integral*, dont la difficulté monte au *ſecond dégré des Problêmes*, aux quadratures, aux rectifications, aux cubatures, à cauſe de ſon expreſſion radicalement infiniteſimale *ydx* ou &c. étoit comme *la partie propre de M. Newton*, & de cette nation célebre qui ſemble former elle ſeule un continent à part dans le monde litteraire, comme dans le monde géographique, & peut-être auſſi dans le civil & dans le politique.

Ce n'eſt pas qu'il n'eut tranſpiré quelque lueur de ce *calcul reciproque des fluxions.* M M. Leibnis, Bernoulli, de l'Hôpital pouvoient bien, ſans le ſecours d'aucun autre, en avoir ſaiſi les premieres opérations, & pour le moins la regle inverſe du retour d'une differentielle à ſon integrale. Mais le grand Nevvton gardoit bien des choſes *in petto*, comme le diſoit M. Leibnis à propos d'autre choſe. Ce que ce profond Géometre en avoit déja donné au public étoit peu acceſſible. A peine avoit-on bien l'idée de ce qu'on qualifioit ſans ceſſe de *nouvelles Methodes*, de *ſcience de l'Infini*, de *Calcul infiniteſimal*, de *Géometrie interieure.*

Ce ne furent guéres que les diſputes élevées il y a environ 20 années entre MM. Leibnis & Nevvton, & preſqu'entre les deux continens Rivaux, qui nous valurent la notion préciſe & déſormais immuable,

des nouveaux calculs. Il fallut que le grand Nevvton parlât lui-même pour nous dire que sa Méthode avoit inséparablement deux branches, dont la Méthode de M. Leibnis, qui en convint, étoit sous le nom d'*Analyse des Infiniment Petits*, la moins considerable, & dont l'*Analyse des Series* étoit l'autre grande moitié.

Et cela est tout d'un coup évident pour quiconque sçait que le calcul integral même ne va pas sans le secours de ces Series, & que la plûpart des quadratures & des *Problêmes du second ordre*, envelopant des radicaux complexes, il faut, avant que de leur appliquer aucune regle d'*integration* ou de resolution, les développer en Series infinies.

C'étoit donc aux Anglois d'executer la seconde Partie de l'Ouvrage de M. de l'Hôpital, & c'est précisément ce que vient de faire le merveilleux *M. Stone*, dans l'Ouvrage dont on donne ici la traduction. Cet Auteur, l'admiration de l'Angleterre même, commence d'être connu en France par l'Extrait que les Mémoires de Trevoux donnerent de son Livre en 1732, *Janvier*, *page* 103, & par la Lettre de *M. le Chevalier de R. au P. C.* inserée à la *page* 109 de ces Mémoires à la suite de l'Extrait.

Comme c'est cette Lettre & cet Extrait qui ont fait souhaiter au public la Traduction de l'Ouvrage Anglois, & que l'Histoire de M. Stone est singuliere, on rapportera ici la Lettre de M. de R. telle qu'elle a paru dans les Mémoires cités.

Lettre de M. le Chev. de Ramſay Membre de la Societé Royale d'Angleterre, au P. Caſtel Membre de la même Societé.

» Le véritable genie ſurmonte tous les deſavan-
» tage de la fortune, de la naiſſance, de l'éduca-
» tion ; *M. Stone* en eſt un rare exemple : né fils du
» Jardinier du Duc d'*Argyle*, il parvint à l'âge de 18
» ans, ſans ſçavoir lire ; ſon pere ne ſçavoit pas lui
» apprendre ſon métier de cette maniere élevée,
» qui rend le jardinage & l'agriculture une partie
» très-utile & très-noble de la Coſmographie & de la
» Phyſique. . . . .

» Par hazard, un domeſtique ayant appris au
» jeune *Stone* les lettres de l'Alphabet, il n'en fallut
» pas davantage pour faire éclore ſon génie & pour
» le developper. Il s'appliqua lui-même, il étudia,
» il parvint aux connoiſſances de la plus ſublime
» Géometrie, & du calcul, ſans maître, ſans con-
» ducteur, ſans autre guide que le pur génie.

» A l'âge de 28 ans il avoit fait tous ces progrès
» ſans être connû, & ſans connoître lui-même les
» prodiges qui ſe paſſoient en lui.

» Mylord Duc d'*Argyle*, qui joint à toutes les
» vertus militaires, & à tous les ſentimens d'un He-
» ros, une connoiſſance univerſelle de tout ce qui
» peut orner & perfectionner l'eſprit d'un homme de
» ſon rang, ſe promenant un jour dans ſon jardin,
» vit ſur l'herbe le fameux Livre du Chevalier Nevv-
» ton en Latin. Il appella quelqu'un pour le ramaſ-

» ser & le reporter dans sa Bibliotheque.

» Le jeune Jardinier lui dit que ce Livre lui ap-
» partenoit : *A vous*, répondit le Mylord ? *Entendez-
» vous la Géometrie, le Latin, M. Newton ? J'entends
» un peu de tout cela*, repliqua *Stone* avec un air de
» simplicité fondé sur l'ignorance profonde de ses
» propres talens, & de l'excès de son sçavoir.

» Mylord Duc fut très-surpris : mais comme il a
» le goût des sciences, il daigna entrer en conver-
» sation avec le nouveau Géometre : il lui fit plu-
» sieurs questions, & demeura étonné de la force,
» de la justesse, & de la candeur de ses réponses.

» *Mais comment*, dit le Mylord, *es tu parvenu à
» toutes ces connoissances ?* L'autre répond : *Un dome-
» mestique m'apprit, il y a dix ans, à lire : A t-on besoin
» de sçavoir autre chose que les 24 letttres pour apprendre
» tout ce que l'on veut ?* La curiosité du Duc redouble ;
» il soupçonne que les démarches de ce genie mer-
» veilleux étoient encore plus surprenantes que ses
» progrès ; il s'asseoit sur un banc, & lui demande
» le détail de tout ce qu'il a fait pour devenir ha-
» bile.

J'appris d'abord à lire, dit Stone, *les Massons tra-
» vailloient alors à votre maison : je m'approchai d'eux un
» jour, & je vis que l'Architecte usoit d'une regle, d'un
» compas, & qu'il calculoit. Je demandai ce qu'il faisoit-
» là, & à quoi tout cela étoit bon ; & je compris qu'il
» y avoit une science que l'on appelloit Arithmetique ; j'a-
» chetai un Livre d'Arithmetique, & je l'appris.*

» *On m'avoit dit qu'il y en avoit une autre appellée Géo-
» metrie : j'achetai des Livres, & j'appris la Géometrie.*

» Je

» *Je vis à force de lire qu'il y avoit de beaux Livres ſur* » *ces deux ſciences en Latin : J'achetai un Dictionaire, &* » *j'appris le Latin. J'appris auſſi qu'il y avoit de beaux Li-* » *vres de même eſpéce en François : J'achetai un Dictio-* » *naire, & j'appris le François. Voilà, Monſeigneur,* » *tout ce que j'ai fait, il me ſemble qu'on peut tout ap-* » *prendre quand on ſçait les vingt-quatre lettres de* » *l'Alphabet.*

» Ce recit charma Mylord Duc. Il tira ce gé- » nie merveilleux de l'obſcurité ; & il le pourvut » d'un emploi qui lui laiſſe tout le tems de s'appli- » quer aux Sciences. Il découvrit en lui le même » génie pour la Muſique, pour la Peinture, pour » l'Architecture, pour toutes les ſciences qui dépen- » dent du calcul & des proportions.

» J'ai vû le ſieur *Stone.* C'eſt un homme d'une » ſimplicité admirable. Il ſçait à préſent qu'il ſçait : » mais il n'en eſt pas enflé. Il eſt poſſedé d'un amour » pur & déſintereſſé pour la Géometrie. Il ne ſe ſou- » cie pas de paſſer pour Géometre. Le bel eſprit & » la vanité n'ont aucune part aux travaux infinis qu'il » ſubit pour exceller dans ce genre. Il mépriſe auſſi » la fortune, & m'a ſollicité vingt fois de prier My- » lord de lui donner un moindre emploi, qui ne » valloit que la moitié de celui qu'il a, afin d'être » plus ſolitaire, & moins diſtrait de ſes études fa- » vorites. Il découvre quelquefois, par des métho- » des qui lui ſont propres, les mêmes verités que » d'autres ont déja trouvées. Il eſt charmé de voir » qu'il n'en eſt pas l'inventeur, & que les hommes » ont fait plus de progrès qu'il ne croioit. Loin d'ê-

» tre plagiaire, il attribuë les ſolutions ingénieuſes
» & admirables, qu'il donne de certains problêmes,
» aux indices qu'il en trouve dans les autres, quoi-
» qu'elles n'en découlent que par des conſéquences
» fort éloignées, &c. »

Sur cet expoſé auſſi naïf qu'élegant, on peut croire que l'illuſtre Auteur de l'Analyſe des Infiniment Petits, ne dedaigneroit pas d'avoir pour continuateur de ſon Ouvrage, au défaut de M. Leibnis, un Géometre du genie & de la capacité de M. Stone, qui a d'autant mieux rempli le plan général de l'Ouvrage, & les premieres vûës de l'Auteur, qu'il n'a pas été plus que lui ſervilement Géometre, & homme d'une ſeule étude & d'une ſcience unique.

Car, ſi toutes les ſciences ſe tiennent par la main, & ont beſoin les unes des autres pour ſe perfectioner & ſe développer, la Géometrie plus que toute autre, eſt une ſcience ſéche & roide, qui ne ſe manie point elle-même, & ne ſçauroit ſe retourner ſans le ſecours d'un peu de Litterature, de Logique, & même de Rhetorique, qui eſt une Logique ornée. Comment parler Géometrie, en effet, ſi on ne ſçait pas parler ? Et comment écrire ſur quoi que ce ſoit, ſi on ne ſçait pas écrire ?

Le Calcul eſt une belle & bonne choſe ſans doute, & il a fallu autant de genie pour l'inventer & pour le perfectioner, que pour aucune autre partie de la Géometrie. C'eſt une partie de la Géometrie en effet, & une troiſiéme partie : Car cette ſcience en a trois bien décidées, calcul, analogie & meſure dont les deux premieres ſont un moyen pour arriver à la

troiſiéme. Le calcul eſt une partie utile, neceſſaire, indiſpenſable même, au moins dans la pratique. Dans la théorie même il abrege l'expreſſion des penſées, il en donne les reſultats : il ſoulage ſur-tout la mémoire & le génie. C'eſt même une ſorte de mémoire locale, & un ſupplément de génie.

Et par-là même il eſt admirable pour les commençans, qui ne ſont pas encore capables d'une forte attention, & peut, étant bien ménagé, beaucoup contribuer à leur donner cette attention, & à les accoutumer à penſer. Il eſt peu d'eſprits novices par exemple, qui ſans calcul puiſſent franchir le ſecond Livre d'Euclide, ou même la 47[e] propoſition de ſon premier Livre, & avec ce ſecours c'eſt tout ce qu'Euclide à de plus facile.

Le calcul eſt bon pour toutes les extremités d'eſprits & de génies. Il fait des merveilles entre les mains d'un genie inventeur qui travaille de tête, & qui embraſſant pluſieurs idées en même-tems, eſt ſoulagé d'en confier quelques-unes à des ſymboles abregés & inarticulés qui ne lui diſent mot, & de replier de moment en moment le fil d'un trop long raiſonnement, en prenant les reſultats & comme des ſommes ou des produits de ſes opérations.

En un mot, outre la pratique qui ne peut s'en paſſer, le calcul eſt neceſſaire à tous ceux qui ne ſçavent pas, ou qui ne peuvent pas ou qui ne veulent pas beaucoup penſer. C'eſt une eſpece de machine, ou de Cric géometrique qui etaye l'eſprit, en lui donnant un point fixe qui lui aide à s'élever plus haut ſans trop d'effort ni de contention.

Auſſi n'a t-on jamais douté que les Anciens, les Appollonius & les Archimedes n'euſſent leur Analyſe & leur calcul, dont on trouve en effet chez eux quelques veſtiges, & pour le moins les ſolides fondemens dès le ſecond Livre d'Euclide qui n'eſt qu'un calcul enveloppé. Or ce n'eſt pas pour honorer beaucoup les Anciens qu'on leur attribuë du calcul. On croiroit au contraire les trop relever au-deſſus de la nature humaine, que de les exempter de ce ſecours. Plus on leur prête de connoiſſance & d'uſage du calcul, plus on prétend leur dérober de force de génie. Ils étoient hommes ſans doute comme les autres.

Le grand avantage du calcul eſt, lorſqu'on a fait une découverte, pour en ſaiſir les branches, les reſultats, les corollaires; pour en faire les applications, en détailler les divers cas; pour la rendre ſenſible par des exemples, en épuiſer toutes les veines: pour l'élever même plus haut ſans trop guinder le raiſonnement, l'étendre ſans verbiage, la géneraliſer ſans trop d'abſtraction. Et c'eſt-là que les nouveaux calculs, l'Analyſe des Infiniment Petits, le calcul differentiel de M. de l'Hôpital, le calcul integral de M. *Stone* triomphent, brillent, & paroiſſent dans tout leur beau. Soyons équitables, formons-nous des idées juſtes de toutes choſes, & ne parlons de la Géometrie que ſuivant les loix ſcrupuleuſes de la plus exacte verité. Meſurons, peſons, comptons, évaluons toutes choſes au plus juſte.

Lorſque par les conditions heureuſement combinées d'un problême élevé, on a conſtaté la nature

Géometrique d'une courbe, & que l'Analyſe Carteſienne venant au ſecours d'un génie épuiſé par un effort de raiſonnement & d'invention, en a renfermé les proprietés caractériſtiques dans une équation, on acheve par les formules du calcul differentiel d'en déterminer à l'aide des ſous-tangentes & des ſous-perpendiculaires tous les points de contour, les inflexions, les nœuds, les plis & les replis les plus tortueux, l'extenſion en un mot & le développement entier; & tout de ſuite on quarre, on cube, on rectifie, on meſure par le calcul integral, & on épuiſe la mine ouverte par le génie.

Car, après avoir rendu de bonne foi au calcul la juſtice qui lui eſt dûë, la même équité, la même bonne foi, le même eſprit de verité Géometrique exige qu'on reconnoiſſe, que c'eſt le génie enfin qui dans tout genre de ſciences & d'opérations d'eſprit, fait les découvertes & les perfectionne: & que c'eſt outrer les choſes, faire tort à ſon jugement, impoſer à celui des autres, fermer la porte aux découvertes, & nuire infiniment au progrès de la ſcience, que de donner le ſupplément du génie pour le génie même, le moyen pour la fin, & la troiſiéme partie de la Géometrie pour le corps complet de la Géometrie, comme on ne l'a que trop fait dans ce dernier ſiecle.

Il eſt vrai que le calcul y a pris de merveilleux accroiſſemens, & y eſt monté peut être auſſi haut qu'il puiſſe aller: ce qu'on ne peut pas dire de la Géometrie en général qui eſt infinie dans ſon étenduë, au lieu que ces progrès mêmes du calcul, prouvent qu'il a comme atteint ſes dernieres bornes.

Plusieurs circonstances ont contribué au grand éclat des nouveaux calculs, & à l'espece d'éblouïssement qui a saisi les Géometres en leur faveur : leur grande perfection n'a peut-être pas cependant été la principale cause de cette espece d'entousiasme ou d'extase. Le calcul s'étoit perfectionné comme tout le reste, successivement, lentement, de proche en proche, & par plusieurs mains.

Les Anciens en avoient posé les fondemens Géometriques. *Diophante* & ses Commentateurs, sûr-tout le célebre *Bachet de Meziriac* l'avoient développé de Géometrique en Arithmetique, & d'Arithmetique en Algebrique, avec quelques semences d'Analyse. Mais *Viete* avoit poussé beaucoup plus loin l'Analyse dont il est comme l'Auteur : & tout de suite *Harriot*, *Ougtred*, *& Descartes* plus que tout autre, l'avoient monté à la grande Analyse qui ne pût désormais monter plus haut sans devenir tout-à-fait transcendante.

Mais à force de s'éloigner de son origine Géometrique, le calcul devenoit inutile pour la Géometrie, dégenerant en pures abstractions, en subtilités, en pointilleries, en mysteres, en chymeres, en visions; si Descartes par un trait de haute intelligence, sentant que toutes les extremités se touchent, & que la fin rappelle le commencement dans le systême circulaire qui regne par tout, n'eût comme replié ce calcul Analytique sur lui-même pour le ramener au Géometrique d'où il étoit parti, & ne nous eût appris à appliquer l'Algebre à la Géometrie.

Ce fut ce repliment important & ce retour du calcul à ſon origine qui le mit en état de s'élever encore plûs haut ; & l'on pourroit prouver, que ſans cela le calcul prenoit un train d'abſtraction qui ne l'eût fait aboutir qu'à une tranſcendance purement méthaphyſique, ſans aucune utilité pour aucune ſcience ſolide.

Mais en l'aſſociant à la Géometrie on lui donna un contrepoids qui l'empêcha de s'évaporer ; on le rendit vrai & réel ; & la tranſcendance où il s'éleva, ne le mit point hors des vrayes bornes de la Géometrie, elle le contint même dans celles de la plus ſaine Phyſique, malgré l'infini qui devint ſon objet, & même parce que l'infini devint ſon objet.

On fut redevable de cette tranſcendance à deux grands hommes, MM. *Leibnis* & *Newton*, un peu prevenus tous deux, celui-ci par ſon Maître le celebre *Barrow*, celui-là par M. *de Fermat*, ſans parler de M M. *Wallis*, *Huguens*, *Bernoulli*, *Cheyne*, *de l'Hôpital*, *Varignon*, *Stirling*, *Tſchirnaus*, *&c.* & divers autres qui les ont merveilleuſement ſecondés. Car voilà à peuprès l'Hiſtoire abregée de tout le calcul.

Mais cette *tranſcendance* même, & le grand nom de *Calcul Infiniteſimal* qui ont conſommé l'éblouïſſement, n'en ont pas cependant été la premiere ni la principale cauſe. Ce fut d'abord le grand éclat du ſyſtême Phyſique de Deſcartes qui, rejailliſſant ſur ſon Analyſe, qu'on auroit peut-être ſans cela raiſonnablement eſtimée, offuſqua tous les yeux, & leur fit paroître le calcul Algebrique comme le grand complement de la Géometrie.

L'ombre que l'envie & l'ignorance avoient jettée ſur la premiere ébauche du tableau de ce grand homme, ne ſervit pas peu dans la ſuite à le rehauſſer. On commença par combattre cette Phyſique & cette Analyſe avec une eſpece de fureur; on les adopta bien-tôt avec une aveugle ſuperſtition, & après avoir comme exilé cet Auteur de ſa Patrie & l'avoir forcé de mourir dans une Terre Etrangere, on lui décerna des ſtatuës.

» Deſcartes qui eſt mort à Stokolm en Suede le
» 11 Février 1650, *diſoit le docte Naudé pag.* 125,
» *du Naudæana*, étoit un homme de mauvaiſe
» mine, & qui n'avoit rien d'agréable. S'il a laiſſé
» quelque choſe à imprimer, ce ſera M. *Piques* qui
» en aura le ſoin: il avoit bien des viſions dans ſa tête
» qui ſont mortes auſſi-bien que lui. »

Naudé, comme on voit, avoit aſſez de mémoires pour y loger les ſiecles paſſés, car c'étoit un érudit dans les formes; mais il avoit peu de cette *faculté imaginatrice*, qui prévoit les ſiecles à venir. Quelques années plus tard, il auroit été Carteſien & demi. Il étoit de ces beaux eſprits qui marchent les premiers avec aſſurance à la tête des Anciens, & les derniers à la queuë des Modernes. Deſcartes même en mourant ne lui avoit pas ouvert les yeux, la fauſſe ſcience ayant droit ſeule de ſurvivre à l'envie.

Au défaut de Naudé aſſez d'autres emboucherent la Trompette, & pour reparer, quoiqu'un peu tard, les excès de mépris & d'injuſtice, dont on avoit accüeilli la perſonne même de Deſcartes, on prodigua à ſon nom les mêmes excès d'éloges & de défe-

rence,

rence. C'étoit peu de lui décerner des ſtatuës : on fit main-baſſe ſur celles des anciens Philoſophes & des modernes qui en avoient mérité ou qui en méritoient, afin que la ſienne s'élevât au deſſus de tout, & que rien ne partageât ſa gloire.

Et, comme ſelon l'oracle, à celui qui a on donne ce qu'il n'a pas, & qu'à celui qui n'a pas on ôte même ce qu'il a, on ne crut pas après avoir placé Deſcartes au-deſſus d'*Ariſtote*, devoir l'abaiſſer au niveau d'*Archimede*, & ſa préeminence dans la Philoſophie décida de celle dans les Mathematiques. L'ébloüiſſement étoit tel, que les eſprits les plus moderés & les plus équitables étoient comme entraînés par le torrent, & forcés, par un principe même de droiture, d'encenſer l'Idole du ſiecle.

Les Anciens ſont pourtant de grands hommes, diſoit une perſonne que ſa naiſſance doit rendre exempte de tout ſoupçon de baſſeſſe à cet égard, mais que le préjugé commun dominoit; les Anciens ſont des hommes admirables, mais admirables par ce ſeul endroit que, *quoiqu'en diſe Viete, ils ne ſe ſont point égarés.* Car du reſte, » ils n'ont pas été loin, &
» ils ont marché par de longs circuits.... Ils n'ont
» touché qu'à fort peu de courbes, ils n'y ont même
» touché que légerement.... Ce ne ſont par tout que
» propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font
» appercevoir aucune methode reguliere & ſuivie. »
Voilà pour les Anciens.

Pour ce qui eſt des Géometres du moyen âge, depuis le renouvellement des ſciences juſqu'à Deſcartes, on voit aſſez que tout ce qu'ils ont pû faire

pour enchaîner les ſiecles anciens avec les modernes, & mettre ceux-ci par le moyen de ceux-là en état d'aller plus loin, a été de reprendre la premiere trame, de foüiller dans les bibliotheques, de deterrer des lambeaux de manuſcrits, de les déchifrer, de les confronter, de les corriger les uns par les autres, de les ſuppléer, de les éclaircir, de les traduire, de les commenter, de les imprimer.

Tout cela a-t-il pû même s'executer ſans beaucoup de génie, & ſans enfanter de vrayes & de grandes découvertes, dont l'Imprimerie, les taches du Soleil, les lunettes, &c. pouvoient immortaliſer ces ſiecles laborieux & bien-faiſans auprès des beaux Eſprits, autant qu'auprès des honnêtes gens qui ſont touchés du bien public?

N'en jugeât-on même que par un certain reſultat de renommée, les Mathematiques ne doiventelles rien aux *Galilées*, aux *Torricellis*, aux *Keplers*, aux *Cavallieris*, aux *Scheiners*, aux *Guldins*, aux *Clavius*, aux *Midorges*, aux *Gregoires de ſaint Vincent*, aux *Saraſſas*, aux *Lalouberes*, aux *Wallis*, &c. pour ne daigner pas même en dire un mot de mépris dans une Hiſtoire des découvertes?

Ils n'ont ſans doute rien fait pour le calcul, & le calcul fait tout déſormais en Mathematique. Tous ces Auteurs *ſont de grands hommes* en bloc, *& ſans doute d'auſſi grands hommes que les Anciens*, mais *qui en ſont tous demeurés-là*, là où les anciens en étoient demeurés; parce que » par une admiration ſuperſtitieuſe » pour leurs ouvrages, ils ſe ſont contentés de les » lire & de les commenter, ſans ſe permettre d'au-

» tre uſage de leurs lumieres que ce qu'il en falloit » pour les ſuivre, ſans commettre le crime de pen- » ſer quelques fois par eux-mêmes, & de porter » leur vûë aux delà de ce que les Anciens avoient dé- » couvert. Ainſi bien des gens travailloient, ils écri- » voient, les Livres ſe multiplioient, & cependant » rien n'avançoit. Tous les travaux de pluſieurs ſie- » cles n'ont abouti qu'à remplir le monde de reſpe- » ctueux Commentaires, & de traductions repetées » d'originaux ſouvent aſſez mépriſables. »

Et voilà les débris ſur leſquels s'éleve enfin la ſta- tuë du grand Deſcartes, avec cette inſcription épi- phonematique. *Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'aviſa de penſer* : Ce qui atteint preſqu'au *ſiluit terra.* Car en bon François cela veut dire, qu'avant Deſcartes les hommes, hommes Romains, hommes Grecs, les Ariſtotes, les Platons ſans difficulté; mais les *Cicerons*, mais les *Virgiles*, mais les *Homeres*, mais les *Demoſthenes*, &c. ne s'aviſoient pas d'être hommes, hommes raiſonnables, ni preſque d'être animaux. Car les animaux ont des yeux, & malgré l'*Automatiſme* Carteſien, s'aviſent quelques fois de les ouvrir, pour faire au moins ſemblant de voir.

Mais après Deſcartes, permis à chacun d'avoir des yeux & d'en uſer, pour tourner toute la Géometrie en calcul comme toute la Phyſique en Hypotheſes: &, comme ceux qui mirent la main à ce calcul étoient vivans & aſſez vifs ſur leurs prétentions, on vit les découvertes ſe multiplier & les inventeurs joüir de leurs droits : c'étoit le ſiecle des découvertes, tout le monde étoit admis à en faire.

Car les Anciens n'avoient enfanté que de serviles copistes, & Descartes n'enfanta que de sublimes inventeurs.

On consentit même à trouver en leur faveur des défauts dans le calcul de Descartes. Mais *au défaut de ce calcul de Descartes, est survenu celui du célebre M. de Leibnis :* lequel au reste fut assez peu ébloüi lui-même comme on verra dans la suite & assez admirateur de la Géometrie ancienne, pour rendre justice à plusieurs de ses prédecesseurs : Car *M M. Bernoulli ont été les premiers qui se sont apperçûs de la beauté de ce calcul.* Et M. Nevvton trouve dans cet éloge une place dont on seroit curieux de sçavoir s'il en fut fort touché, parce que, dit-on, *son excellent Livre intitulé : Philosophiæ naturalis principia Mathematica, est presque tout de ce calcul.*

La raison de douter si M. Nevvton agréa cet éloge, est que les Anglois, quoiqu'ils soient peut-être les plus forts calculateurs de l'Europe, & que M. Nevvton soit un autre pere du calcul, très-comparable à Descartes ; ces profonds Géometres n'ont pourtant jamais estimé ce calcul que ce qu'il vaut, jamais ils ne l'ont élevé au-dessus de la méthode ancienne, & M. Nevvton en particulier en a parlé avec assez de mépris, jusqu'à le traiter de supplément de génie, de ressource même de petit génie : & il s'en est très-peu & presque point servi dans ce Livre, d'autant plus admirable des principes de la Philosophie, qu'on n'avoit point lû sans doute lorsqu'on a avancé qu'il étoit *tout de ce calcul.*

Cela est si incontestablement vrai, que ce Livre

ayant en tout 510 pages de la premiere édition, ce n'eſt qu'au milieu & à la 250ᵉ page qu'on trouve le fameux Lemme *Datâ fluente*, &c. qui contient le principe immédiat du calcul ſoit direct, ſoit reciproque des fluxions; & qu'encore ce principe eſt là plûtôt géometriquement démontré qu'analytiquement deduit; & que dans la ſuite l'Auteur n'en fait preſqu'aucun uſage analytique, & qu'il procede uniquement ſelon *l'ancienne maniere d'Euclide, d'Appollonius, d'Archimede*, qui eſt la ſeule vraiment Géometrique, la ſeule raiſonnée, & démonſtrative, la ſeule qui ſente le genie & qui parle à l'eſprit.

Prenons bien garde: autre choſe eſt inventer le calcul, perfectionner le calcul, donner les principes du calcul: autre choſe, uſer du calcul, calculer. Uſer du calcul, calculer ſuppoſe une connoiſſance, une théorie preliminaire du calcul. Ce n'eſt pas par le calcul qu'on invente ni qu'on perfectionne le calcul: L'uſage du calcul ne peut en donner que la routine, & à la longue peut-être mettre l'eſprit en voye d'en penetrer les principes. C'eſt le génie, la méditation, le raiſonnement qui inventent le calcul comme tout le reſte.

Et ſuivant cela Deſcartes eſt admirable, non pas préciſement pour nous avoir donné du calcul, mais pour l'avoir inventé ou enrichi de ſes découvertes, & ſur-tout pour en avoir reduit en art l'application à la Géometrie. Mais ces découvertes il pouvoit abſolument nous les donner ſans tant de calcul, ſi ſon but n'avoit pas été de nous donner en effet la maniere de calculer, & comme la perſonne même

du calcul; la perſonne, dis-je, ou le corps même du calcul plûtôt que l'eſprit.

Car il eſt aſſez ſingulier que les Géometres anciens nous ayant conſtament donné l'eſprit du calcul, ſes principes, ſa pure théorie démonſtrative plûtôt que ſon corps, ſon uſage, ſes regles; Deſcartes ait pris tout le contrepied, & ait affecté d'en donner les regles, les reſultats, les applications ſans preſqu'aucune théorie ni démonſtration. Les Géometres rigides du tems blâmerent fort cette méthode dans le fond peu géometrique, & qui alloit plûtôt à la gloire de l'Auteur qu'à l'inſtruction du public: On accuſa Deſcartes d'avoir uniquement voulu par-là ſe rendre admirable. On l'excuſe cependant ſur ce qu'il ne vouloit pas faire un Livre trop long, & ſur ce qu'il prétendoit ſe vanger par ce petit artifice de ſes critiques importuns, en leur donnant des énigmes à déchiffrer. Il y réuſſit au-delà de ſes eſperances.

Pour revenir à M. Nevvton, ſon Livre des Principes ne contient guere non plus que l'eſprit & les ſemences du calcul, & s'il nous en a donné ailleurs quelques morceaux, ce ſont de petits traités qu'il n'a même vraiſemblablement faits, que pour ſe conformer, contre ſa propre inclination, au goût regnant. Il voyoit que le calcul avoit tout à fait pris le deſſus, qu'on n'étoit déſormais réputé Géometre qu'à ce titre, qu'on ne l'avoit aſſocié lui-même aux Géometres modernes que ſur ce pied & en ſuppoſant que ſon Livre *étoit tout de calcul*; qu'il étoit ſur le point de ſe voir enlever toute ſa gloire par M.

Leibnis, qui s'étoit lui-même tout à fait livré au calcul, en voyant ses premiers essais mieux accueillis qu'il ne l'avoit prévû. M. Nevvton se prêta donc au calcul.

Et alors la Géometrie ne fut plus qu'un ressassement de lettres & de symboles, de tables & de formules, de tarifs, en un mot, & de comptes faits. On auroit pris le cabinet d'un Géometre pour un Bureau de Finance, ou pour un Comptoir de Commerce. Encore si c'eût été un vrai commerce ou une bonne finance, la réalité d'un calcul effectif dédommageroit le cœur de l'humiliation de l'esprit.

Mais avec les aridités & les épines d'une Algebre triplement indéchifrable, on se trouvoit encore condamné au ridicule emploi de calculer éternellement à faux ou à vuide, d'accumuler lettres sur chiffres, symboles sur signes sans aboutir de la vie à aucun vrai resultat, dont on pût joüir : quoiqu'il paroisse aussi essentiel à un Calculateur de profession de dire : *Je calcule, donc j'ai*; qu'à un homme vivant de dire : *Je pense, donc je suis.*

On peut comparer le calcul dans la Géometrie aux troupes auxiliaires dans les armées Romaines. Tandis que ces troupes ne furent qu'auxiliaires & le tiers tout au plus d'une legion, Rome s'agrandit & conquit l'Univers. Mais la paresse gagna les legions avec les richesses des nations : on déposa donc le casque, la cuirasse & le courage : & les troupes étrangeres & barbares, les Huns, les Gots, les Visigots, les Arabes sous le nom d'auxiliaires, gagnerent les armées, les remplirent, les anéantirent ; & le tiers

devenant le tout, le tout fut reduit à rien, & il n'y eut plus enfin d'Empire Romain.

C'eſt le train que prend la Géometrie depuis qu'elle eſt métamorphoſée en calcul Arabe & preſque Oſtrogot, & que le tiers y eſt devenu auſſi le tout. La tête preſque delivrée du ſoin de penſer, devient pareſſeuſe, & l'eſprit laiſſe aller les doits: on ſe repoſe de tout ſur des formules: on ſe contente de démonſtrations *à poſteriori*, qui ne font juger du vrai des choſes que par l'évenement, & non par le principe interieur & par l'idée. Exige-t-on même des démonſtrations d'aucune eſpece?

Au défaut de l'évidence on ſe paye fort bien de la certitude, comme le Quinze-vingt qui ſubſtituë le toucher au coup d'œil, mais malgré lui. La certitude eſt même remplacée par l'induction, c'eſt-à-dire, encore le toucher précis par un tatonnement vague. Les exemples ſervent de preuves, l'explication de raiſonnement. Les principes les plus fondamentaux paſſent de bouche en bouche, & de Livre en Livre par ſimple voye de tradition.

Ainſi, loin que Deſcartes ait été l'époque, au moins en Géometrie, de l'ouverture des yeux & des eſprits, il eſt préciſement arrivé ſans que ce grand homme en ſoit pourtant reſponſable, & même parce qu'il étoit grand homme & qu'il avoit eu lui-même les yeux & l'eſprit très-ouverts, il eſt arrivé ce qui arrive après tous les grands hommes, après les inventeurs, après les peres qui ont amaſſé du bien, après les Rois mêmes qui ont agrandi leurs Etats, qu'on a joüi de ſes tréſors & de ceux de quel-

que

ques autres dont nous allons parler, ſans ſe mettre en peine de les augmenter. La Géometrie s'eſt trouvée aſſez riche dans le dernier ſiecle pour qu'on s'amuſât à la remanier par des formules & des inductions. Un riche heritier paſſe ſa vie à compter ſes thréſors & à les recueïllir.

On n'outre rien ici : on prie les Géometres de ne ſe point roidir là-deſſus : on ne veut offenſer perſonne : on veut ſimplement dire une verité utile, & la rendre bien ſenſible, afin d'ouvrir les yeux ſur un abus qui perdra enfin une ſi belle ſcience ſi on perſiſte de s'y opiniâtrer. Les Géometres modernes eux-mêmes ne conviennent-ils pas tous les jours de ces deux ou trois points capitaux ?

1°. Que le calcul ſoulage l'eſprit en le déchargeant du ſoin de penſer : & peuvent-ils nier qu'il ne faille penſer pour perfectionner veritablement une ſcience auſſi profonde que l'eſt la Géometrie ? 2°. Ne conviennent-ils pas que les démonſtrations des nouveaux calculs ne ſont jamais qu'*à poſteriori* ? 3°. Et, ce qui devroit tout-à-fait deſſiller les yeux en faveur de la Géometrie ancienne, n'ont-ils pas mille fois remarqué de bonne foi que dans les concluſions de la Géometrie moderne, l'eſprit aime à ſe retrouver avec celles de l'ancienne Géometrie, & qu'il n'y a que l'uniformité du but auquel ces deux Géometries aboutiſſent, qui raſſure tout-à-fait ſur la ſuſpenſion & l'incertitude même où laiſſent les nouveaux calculs, où laiſſe même en général toute ſorte de calcul, ſur-tout l'Algebrique qui n'a rien de lumineux ?

L'ingenieux *M. de Fontenelle*, qui eſt de tous les

Auteurs modernes un de ceux qui ont le plus & le mieux philoſophé ſur la nature des nouveaux calculs, convient partout, dans ſon élegante Hiſtoire de l'Académie, & dans ſes nouveaux Elemens de la Géometrie de l'Infini, du défaut que nous remarquons ici dans ces calculs. *Il eſt arrivé dans la haute Géometrie*, dit-il, *une choſe bizarre, la certitude a nui à la clarté.* Il ajoute dans la Préface de ſes Elemens. *Le calcul n'eſt gueres en Géometrie que ce qu'eſt l'experience en Phyſique, & toutes les vérités produites par le calcul, on les pourroit traiter de vérités d'experience.*

Ce célebre Auteur attribuë cette incertitude ou ce défaut de clarté à l'Infini : mais ſans Infini ſa propoſition eſt toujours vraie, que le calcul n'a qu'une certitude d'experience & comme d'évenement. L'Infini peut bien augmenter l'incertitude & l'obſcurité. Mais il eſt vrai-ſemblable que, ſi cet Infini étoit manié ſelon la methode des Anciens, géometriquement & ſans calcul, par principes & non par regles, comme l'ont fait M. Nevvton dans ſes principes, & Grégoire de S. Vincent dans ſon grand *ouvrage géometrique*, l'Infini n'auroit au moins que ſes propres nuages ou n'en auroit point du tout, n'en ayant jamais eu dans ces deux Auteurs, ni dans Archimede qui a travaillé ſur le même fonds, mais géometriquement, par idée & par raiſonnement.

Nous n'avons encore touché que la premiere & dans le fond la moindre cauſe de l'éblouïſſement des modernes en faveur de leurs calculs. Cet éblouïſſement n'auroit été ni ſi durable, ni ſi univerſel, s'il n'avoit été fondé ſur quelque choſe de plus réel, de

plus ſubſtantiel qu'une méthode, une maniere, *un mode*, & *une mode* par conſéquent, dont on ſeroit bien-tôt revenu comme on revient de toutes les modes. Voici le fait hiſtorique.

Les circonſtances, où le calcul reçut ſa perfection, furent très-favorables pour lui donner un air brillant de grandes découvertes géometriques. Car préciſément dans le même tems que *Deſcartes* donnoit ſon Analyſe, *Gregoire de S. Vincent* qui vivoit avant & qui a vêcu après Deſcartes, enrichiſſoit la Géometrie d'un nombre inconcevable de vérités nouvelles, de vûës profondes, de recherches étenduës, de principes féconds, de methodes même génerales & très-regulieres.

Et comme toute, ou preſque toute la Géometrie, ſur-tout la plus élevée, peut ſe mettre en calcul, parce qu'après tout le calcul n'eſt qu'une maniere, une mode, un habit, & que ce calcul arrivé à ſa perfection ne demandoit qu'à ſe réaliſer, à s'appliquer à quelque ſujet, à ſe ſignaler même par des ſujets illuſtres, toute la théorie de Gregoire de S. Vincent fut jettée dans ce moule, paſſa par cette filiére, fut revêtuë en un mot de calcul, & ſi bien maſquée que le renouvellement joint à la nouveauté réelle, fit paroître le calcul comme un Perou inépuiſable, dont les premieres veines ſembloient en annoncer de ſecondes & de troiſiémes à l'infini.

Gregoire de S. Vincent étoit un Auteur vaſte, profond, original, & par conſequent difficile : Il ne fut permis qu'aux Géometres du premier vol d'y puiſer. Mais les anciennes découvertes furent un butin

pour tout le monde, & le calcul ne se refusant à personne, il n'y eut plus de Géometre qui ne fût admis à se signaler par quelque découverte. Archimede, Appollonius, Euclide, tout fut refondu, & reprit un ait de nouveauté par le moyen du calcul.

Ajoutez à cela les sciences Physico-Mathematiques anciennes & modetnes, les découvertes de Kepler, de Guldin, de Galilée, de Torricelli, & surtout celles du profond & inépuisable Nevvton, qui sans être de calcul, ou même parce qu'elles n'en étoient pas encore, ne sembloient respirer que le calcul, ne demander que du calcul pour être développées & comme reduites en pratique.

Car c'est une réfléxion qui ne paroît rien, & qui est pourtant singuliere, que la Géometrie moderne est dans son ptopre caractere & par sa forme toute problématique, une Géometrie pratique qui suppose par conséquent une Géomettie théotique, d'où elle est évidemment déduite par voye de corollaire & de résultat.

La Géomettie ancienne étoit presque toute théorematique, & les modernes mêmes, dans la passion qui les animoit de critiquer les Anciens, ont fort blâmé Euclide d'avoir mêlé dans ses Elemens les problêmes avec les théorêmes, c'est-à-dire, la pratique avec la théorie. Il est donc ttès-singulier de voir toute la Géometrie moderne sous une forme problématique. Qu'on ouvre l'Analyse des Infiniment Petits de M. de l'Hôpital, & de M. Stone ; ce n'est point la faute de ces Auteurs : C'est simplement le stile du calcul & la marque certaine d'une seconde invention.

Seroit-il naturel ſans cela qu'une ſcience auſſi raiſonnable que la Géometrie, qui eſt peut-être la ſeule où la raiſon ait un plein droit de triompher de l'autorité, n'eût d'autre ſtile que ce langage impérieux : *Faites ceci, faites cela, decrivez un cercle, tirez une ligne, formez un angle, tracez une parabole*, & que ſans ſe piquer preſque d'aucune démonſtration raiſonnée, elle n'eût d'autre garand de ſes procedés que le deſpotique mot *ſit pro ratione voluntas?*

Cependant la Géometrie moderne n'étant point théorique par ſon calcul, n'eſt point pratique ni praticable non plus par ſon calcul algebrique, analytique, infiniteſimal : & la pratique même de l'Algebre & de l'Analyſe ne peuvent jamais paſſer que pour une très-haute, très-ſublime, très-quinteſſentiée & très-abſtraite ſpéculation.

Mais admirons encore ici les Modernes. Ils nous parlent de *reſpectueux commentaires*, & de *repetitions d'originaux*. Et que font-ils donc depuis près d'un ſiecle, tant en Géometrie à l'aide du calcul, qu'en Phyſique à l'aide de l'hypotheſe, que des commentaires très-reſpectueux & des repetitions preſque litterales, de deux ou trois ou quatre originaux modernes, des anciens mêmes, d'Archimede, d'Appollonius & d'Euclide, tout Euclide qu'il eſt?

On ne blâme point les Modernes de ce procedé, on n'en parle même que pour montrer qu'il n'en faut blâmer perſonne, & que dans le fond ces commentaires, & ces répetitions & ces reſpects ſont dûs aux Auteurs & au public ; que les Auteurs originaux, en ſaiſiſſant la vérité, n'attrappent pas tou-

jours la vraye maniere, la maniere la plus ſimple & la plus demonſtrative de la propoſer. Qu'une choſe utile eſt bonne à dire & à redire cent fois, qu'à force de la remanier on la meurit, à force de la reſaſſer on l'inculque, à force de la faire paroître & reparoître on la rend ſenſible, & qu'enfin nous ſommes redevables à ceux mêmes qui ſe donnent la peine de commenter & de repeter l'*a*, *b*, *c*. Il faut prendre toutes choſes du bon côté, & pour le moins être toujours équitable.

Soyons-le donc tout à fait, & puiſque le calcul n'eſt qu'une petite partie de la Géometrie, ne nous bornons pas au point de vûë dans lequel la premiere partie de l'Analyſe des Infiniment Petits nous a préſenté l'Hiſtoire de cette ſcience : Tâchons dans cette ſeconde Partie de rendre cette Hiſtoire un peu plus complette, en rendant juſtice à ceux qui ſans aucun étalage de calcul n'ont pas laiſſé de contribuer beaucoup à ſa perfection, ou du moins à ſon embelliſſement & à ſon éclat, en contribuant à la perfection de la pure & ſaine Géometrie.

Les ſections coniques ſont comme le corps ſolide & ſubſtantiel de cette ſcience. C'eſt-là qu'il en faut toujours revenir. On n'eſt Géometre qu'à proproportion qu'on ſe rend profond dans la théorie de ces ſections. Elles ſont le modele de toutes les autres courbes. Celles des degrés pairs ſont *circulaires* ou elliptiques : celles des degrés impairs ſont infinies en étenduë, c'eſt-à-dire, ou *paraboliques* ou *hyperboliques*, ou *parabolo-hyperboliques*. Mais c'eſt plus pour la curioſité ou pour l'ornement de l'eſprit que pour

aucun uſage neceſſaire, qu'on s'amuſe quelquefois à contempler ces autres courbes : On n'en a jamais pouſſé bien loin la ſpeculation : Au lieu que depuis *Appollonius* les *coniques* ont été le grand objet de tous les profonds Géometres.

Ce fut en ébauchant leur théorie que cet ancien Auteur mérita le nom de *grand & de ſubtil Geometre :* Car il eſt vrai qu'il ne l'avoit qu'ébauchée, parce qu'un premier inventeur ne peut pas tout inventer. Il eſt vrai auſſi que les ſciences étant tombées peu après lui, & ne s'étant enfin ranimées que peu à peu & par degrés, comme nous l'avons expliqué, on avoit peu ajouté aux découvertes d'Appollonius juſqu'au ſiecle qui vient de finir : & cela même en rendant la Géometrie peu vaſte, la rendoit peu feconde en nouvelles découvertes. Car plus on a, plus il eſt facile d'acquerir, & ce n'eſt que par le connu qu'on pénétre juſqu'à l'inconnu : l'homme ne fait rien de rien.

Il falloit des génies vigoureux & preſque créateurs qui fuſſent capables de tirer tout de leur propre fonds. Tel fut, on l'oſe dire, parce qu'on va le prouver, le célebre *Gregoire de S. Vincent*, dont on ne s'amuſera point ici à faire l'éloge ni le caractere, mais dont on tâchera de faire connoître les Ouvrages. Il avouë lui-même, malgré ſon extrême modeſtie & ſon reſpect exceſſif pour les anciens, que la lumiere qu'ils nous avoient laiſſée en Géometrie étoit bien foible : *Lumen quod ab antiquis nobis tradita Geometria exhibebat, nimis debile eſſe quam ut, &c.*

Il penſa donc à l'augmenter, & il y réuſſit au

point que son siecle en fut ébloüi comme nous l'avons dit, & ébloui jusqu'à le méconnoître: Car l'objet qui éblouit, n'est pas toujours celui qu'on connoît le mieux ; & l'œil étonné d'un éclat trop vif, cherche des objets plus temperés comme pour s'y reposer & y transporter l'image de celui qui l'a offusqué. Le Soleil par qui l'on discerne toutes choses ne se laisse point discerner ; & si par hazard on s'obstine quelques instans à le contempler, on retrouve ensuite son image sur tout ce qu'on s'avise de regarder.

Gregoire de S. Vincent ne fut pas cependant géneralement méconnu ; & *Sarassa* nous apprend que les lettres que son maître recevoit de toutes parts, étoient adressées au *nouvel Apollonius*, à l'*Archimede moderne*, *au grand Géometre* : Voici les paroles de Sarassa dans sa Préface, *eum Archimedem alterum alii, alii Apollonium, magnum Geometram alii litteris inscriptis & non immeritò passim compellent, &c.*

Nous avons perdu la moitié au moins des Ouvrages de cet Auteur, un traité ample sur la *Quadratrice de Dinostrate*, une *Statique* entiere, &c. qui furent brûlées dans l'incendie de Prague au tems des guerres de Boheme. Mais il nous reste encore deux grands *in-folio*, & même trois ; car il y a un Ouvrage posthume peu connu. Ces trois volumes contiennent près de 3000 Propositions, dont il y en a bien 1500 sur les Sections coniques, sur leur nature, leurs proprietés, leurs raports, leur comparaison, leur description géometrique ou organique, leurs segmens, leurs secteurs, sur tous les aspects sous lesquels on peut les envisager.

C'est

C'eſt un grand Paradoxe & un Phenomene peut-être unique, qu'un gros Livre, qu'un triple *in-folio*, tout plein de vrayes & de grandes découvertes ſans aucune compilation des ouvrages d'autrui. Auſſi le célebre *Viviani*, qui étoit lui-même un grand & un ſubtil Géometre, & qui étoit aſſocié de l'Académie Royale des Sciences de Paris, qualifie ce Livre d'ouvrage vrayement Athlantique: *In opere verè Athlantico ſummi Geometræ Gregorii à S. Vincentio, è doctiſſimâ, ſpectatiſſimâ, nec unquam ſatis laudatâ, &c.*

C'eſt donc d'abord par un détail étonnant de proprietés des Sections coniques, & ſur-tout par le rapport & la comparaiſon de leurs proprietés générales, que Gregoire a mis la Géometrie en état de s'enrichir, par la richeſſe même qu'il lui a procurée. Mais il ne s'eſt pas borné à ce détail, & il a ſçû lui-même joüir de ſes premieres richeſſes pour en acquerir de nouvelles. Le détail l'a conduit au général, & en nous donnant des découvertes il nous a donné auſſi les méthodes, dont il s'étoit ſervi pour les faire, & dont on s'eſt ſervi d'après lui; je dis les méthodes de génie, de raiſonnement, ſinon de calcul; & peut-être même auſſi celles de calcul, ou pour le moins leurs principes géometriques les plus immédiats.

Partout il nous avertit de la généralité de ſes propoſitions & nous apprend à en faire les applications en les faiſant lui-même. Il avoit particulierement étudié les Anciens dans la vûë de découvrir leur Analyſe, celle du moins qui les avoit ſecretement dirigés: & il lui avoit fallu la deviner & preſque la

créer de nouveau, ou peut-être pour la premiere fois. *Methodus enim demonstrationis*, dit-il, *quâ Archimedes in hâc materiâ utitur usquè adeò secreta est & involuta, &c.* Et plus bas, *planè mihi persuaseram verissimam me reperisse viam quâ Archimedes adinvenit, &c.* Il étoit persuadé, comme bien d'autres, que les Anciens avoient caché leur artifice par un nouvel artifice pour se rendre plus admirables à la posterité: *Antiquis enim valdè solemne fuit artificium adinventionis celare, &c.*

Mais il est fort douteux s'il y a eû d'autre finesse de leur part; & il paroit plus croyable que tout leur Art se reduisoit à avoir beaucoup de génie & une application d'esprit convenable; & que s'ils ont supprimé les divers moyens de calcul ou les autres tentatives, dont ils se sont servis naturellement pour arriver à leur but, ils l'ont fait comme un Architecte ôte les ceintres & les échafauds, & écarte les massons après l'achevement de l'édifice.

Que sçait-on même? l'Edifice de la Géomettie des Anciens a été peut-être encore trop simple & trop imparfait, pour qu'ils ôtassent ces ceintres & ces échafauds; & peut-être avons-nous dans leurs Livres tout l'artifice géometrique & toutes les méthodes dont ils se sont servis, & que nous avons tort d'aller chercher bien loin.

Car si le calcul est une méthode ou une maniere utile, un outil pour l'invention, le second Livre, & plusieurs autres morceaux d'Euclide ne sont qu'un calcul enveloppé, ou plûtôt théorique & purement géometrique. Mais ce n'est-là qu'une maniere en ef-

fet & un outil : La comparaiſon, l'analogie, la proportion, le rapport eſt une vraye méthode, un inſtrument, & comme la choſe même en Géometrie, dont tout le fait conſiſte à découvrir des rapports. Pour méſurer les choſes en effet, il faut les rapporter les unes aux autres, les comparer.

On peut abſolument ſe paſſer de calcul dans cette ſcience, ſi ce n'eſt dans la pratique, comme nous avons dit ; & alors même le calcul le plus arithmetique eſt ſuffiſant, le meilleur & le ſeul bien uſuel. Mais on ne peut s'y paſſer de proportions & de rapports bien développés, & en quelque ſorte bien prononcés. Et alors on ne peut accuſer les anciens d'avoir caché leur artifice, puiſqu'ils nous ont laiſſé une théorie diſtincte des rapports, & leur uſage par tout ſenſible.

Tout ce qu'on pourroit dire, c'eſt que cette théorie étoit fort bornée & fort imparfaite, comme s'en apperçut Gregoire de S. Vincent dès qu'il voulut tenter d'aller plus loin. On pourroit aiſément faire voir, dit-il, à la tête de ſon admirable Livre des *Proportionalités*, que la Géometrie eſt juſqu'ici fort imparfaite : *Mutilam in hodiernam diem & imperfectam eſſe Geometriæ ſcientiam multis argumentis oſtendi poſſet, atque adeo cultores exquirere qui notitiam rerum ſuo labore excludant, &c.* Or le point principal ſur lequel la Géometrie avoit beſoin d'être portée plus loin, c'étoit l'artifice des Proportions : *Inter cæteras verò partes quæ necdum prodierunt, adnumerari meritò poteſt pars ea omnis quæ rationum Proportiones continet, & uſum explicat quo Geometricis contemplationibus inſervire queat.*

Ce fut donc pour ſuppléer à ce défaut de la Géometrie, ou de la méthode Géometrique des Anciens, que cet Auteur compoſa ce Livre des Proportionalités en 172 Propoſitions toutes nouvelles, & qu'il appelle avec raiſon une nouvelle Géometrie, *novam Geometriam concinnare me oportuit ;* de nouveaux ſecours, *novis adjumentis ;* de nouveaux Arts, *novas Artes ;* pour aller plus loin, ſelon la deviſe *plus ultra,* qu'il a fait ſervir d'ame aux Colonnes d'Hercule dans le frontiſpice de ſon Ouvrage.

Tout ce que l'antiquité nous avoit appris ſur les proportions, ſe réduiſoit à des rapports de deux termes, & à des proportions de deux rapports rationels & homogenes. Gregoire nous apprit à faire entrer les diſproportions mêmes & toutes ſortes d'inégalités & de grandeurs heterogenes, incommenſurables, & incomparables même dans les comparaiſons ou analogies Géometriques. Il conſidera les rapports de rapports, les proportions de proportions, le tout avec facilité par le moyen des expoſans ou dénominateurs. Ses proportionalités embraſſent juſqu'à 8, 12, 16, ou plus de termes, ſouvent irrationels & tout-à-fait diſſemblables.

Avant lui Viete & divers Auteurs, bornés au calcul & au rationel avoient établi comme une maxime, que le courbe ne pouvoit entrer en comparaiſon avec le Rectiligne, l'incommenſurable avec le commenſurable, l'infini avec le fini, le plan avec la ligne, le ſolide avec le plan. C'étoit-là une borne poſée, non cependant par les Anciens qui avoient quarré la parabole & la lunule & même en un ſens le

cercle, & rectifié sa circonference. On ne voit pas même que Descartes, tout Descartes qu'il étoit, eut pensé à ôter cette borne.

Descartes avoit pris la Géometrie d'un autre côté, du côté des problêmes lineaires ou executables par des lignes, & nullement du côté des quadratures qui sont pourtant le vrai côté; le but de la Géometrie étant de mesurer, & par consequent de quarrer, de rectifier, de cuber; & les grandes découvertes de la Géometrie ne s'étant faites, comme bien des gens l'ont observé, qu'en visant à ce but general, comme celles de la Chymie en visant au grand œuvre qui n'est pourtant qu'un but chimerique; au lieu que les quadratures sont un but réel, & même l'unique dernier but.

Gregoire de S. Vincent qui dirigea tous ses travaux Géometriques de cinquante années vers ce but, sentit son génie captivé par la maxime moderne, & ce fut pour la surmonter qu'il composa ses proportionalités. L'incommensurable ne l'arrêta pas. Il sçût éviter l'*incommensurable absolu*, & reduire à des exposans rationels l'*irrationel relatif*, & l'infini même à des rapports finis.

Car l'infini devint son objet aussi familier que le fini. Il saisit cet infini par les deux endroits par où le calcul le plus moderne l'a saisi. 1°. Dans le progrès interminable d'une *serie infinie*; 2°. en lui-même dans le partage d'une grandeur quelconque en *parties infiniment petites*.

Son Livre des *Series Géometriques* en 177 Propositions toutes de lui, est sans doute un Art nouveau,

&.une méthode d'invention qui a servi de fondement à la principale moitié des nouvelles méthodes de calcul infinitesimal. La grande occupation de ce calcul a été depuis ce tems-là d'exprimer ces series, tantôt par des nombres Arithmetiques, tantôt par des lettres Algebriques, & enfin par un Algebre Analytique, tout-à-fait transcendante & générale, qui est l'Ouvrage du grand Nevvton, & où le célebre M. *Stirling* entr'autres s'est merveilleusement signalé.

Mais si le Livre des Series fût la semence prochaine du calcul moderne de ces Series, le Livre *de ductu Plani in Planum*, en 246 Propositions fut celle de la seconde partie des nouveaux calculs, & pour le moins du calcul integral. On peut regarder ce Livre en effet comme un calcul integral de tête, & du reste comme un vigoureux effort de génie.

La méthode même qui y regne, de former des corps, même les plus bizares, par une multiplication locale de lignes diversement posées, n'a été developpée qu'à demi par le calcul integral, & la partie du génie qui consiste dans cette *position*, & dans cette *multiplication locale* a été long-tems rebelle à toutes sortes de calculs, & n'y a été assujetie que depuis deux ou trois années dans le Livre qui traite des *courbes à double courbure*, & qui n'en est que plus estimable, pour être l'ouvrage d'un * jeune Géometre, à qui on est bien aise de rendre justice. Car l'Histoire de la Géometrie doit être vraye par deux endroits, & parce qu'elle est Histoire, & parce

* M. Clairaut.

qu'elle eſt l'Hiſtoire de la Géometrie.

Oüi, le Livre *de Ductu Plani in Planum*, eſt proprement un traité de courbes à double courbure, & ſur-tout de *Corps terminés par des courbes à double courbure.* La hauteur de cette ſpeculation l'avoit renduë peu traitable juſqu'ici. Le premier & preſque le ſeul qui y avoit touché depuis ſon inventeur, étoit le célebre *Laloubere*, qui avoit quarré géometriquement la courbe formée par un tour de compas ſur la ſurface d'un Cylindre. Quadrature qu'on avoit enſuite fort bien renduë par le calcul, qui vient enfin de s'approprier avec beaucoup de dexterité cette theorie épineuſe.

Voilà au vrai les nouvelles méthodes de Géometrie; voilà le nouvel Art avec quoi Gregoire de Saint Vincent, non-ſeulement fraya le chemin aux nouvelles découvértes (c'eſt-à-dire, aux nouveaux calculs) *ad inventa recentiora viam ſtravit*, comme le dit *Wolfius* dans ſon Hiſtoire des Mathématiques, mais fit auſſi lui-même une infinité d'autres grandes découvertes. Car cet eſprit vaſte, fecond & appliqué alloit de découverte en découverte; en avoir fait une, étoit une raiſon pour lui d'en faire une autre.

L'immenſe détail de proprietés dont il enrichit d'abord les Sections coniques, l'éleva peu à peu aux grandes méthodes dont on vient de parler; & ces méthodes générales le ramenerent à un nouveau détail de decouvertes encore plus élevées que les premieres.

Archimede avoit le premier quarré la parabole,

mais par un artifice peu naturel, & en un ſens peu Géometrique, plus merveilleux cependant que la quadrature même de la parabole. Les Modernes qui ont remarqué ce detour ou cette eſpece d'écart ſçavant d'Archimede, mais qui auroient dû un peu plus l'admirer, ont en revanche fort admiré leurs calculs pour la facilité avec laquelle ils leur donnoient cette quadrature de la parabole comme d'un trait de plume.

Mais ſans aucun calcul & par le ſimple raiſonnement Géometrique d'Euclide ou d'Apollonius, notre Auteur dans ſon traité de la parabole & même ailleurs, donne vingt & trente manieres differentes de quarrer cette courbe & ſes divers ſegmens extérieurs & interieurs : & pluſieurs de ces quadratures ſont l'affaire d'une ou de deux Propoſitions tout auſſi courtes que le peut-être le procedé du calcul moderne pour arriver au même but.

Une découverte de la plus haute eſpece en ce genre de quadratures, fut la *ſymbolization* de la quadrature de l'hyperbole avec celle du cercle: cette ſeule découverte miſe en calcul, a comblé de gloire les cinq ou ſix Géometres les plus célebres du dernier ſiecle. *Mercator de Holſtein en Dannemarc*, d'après *le Comte Brounker*, illuſtre Anglois, quarra l'hyberbole par une Serie. Auſſi-tôt *M. Barrou* Maître de *M. Newton*, ſe ſouvint que cet illuſtre Diſciple lui avoit fait voir autrefois une pareille quadrature. D'un autre côté *M. Leibnis* trouva la fameuſe *quadrature ſerielle* du cercle, & le non moins célebre *M. Huguens* fut comme enthouſiaſmé du rapport merveilleux

de

de cette quadrature avec celle de l'hyperbole. *Wallis* & divers autres y mirent aussi la main.

Or, voici comment Gregoire de S. Vincent l'y avoit mise plusieurs années avant tous ces Auteurs. On en va juger par la *Scholie*, qui termine sa théorie Géometrique sur cette matiere, *pag.* 1210, *t.* 2. „ Nimis elegans visa est mihi symbolizatio inter pro- „ prietates circuli & hyperbolæ, quam ut eam sup- „ pressam voluerim, aut silentio præteritam. Quid- „ quid enim ad circuli quadraturam necessarium fuit, „ id omne in Hyperbolæ quadratura ita ad amussim „ sese offert, ut *iisdem prorsus caracteribus*, eademque „ discurrendi methodo utramque absolvere possis, „ modo disponantur debita ratione quæ requiritur „ ad discursum formandum, &c. Neque enim est „ alia diversitas .... quam quòd una parabolarum „ D N. cum hyperbola D P P. *ad aliam partem trans- „ lata sit* .... Mirabiliter enim reficere nata est us- „ que adeo universalis symbolizatio. „

On voit bien que ce grand homme, loin d'avoir fait au hazard une découverte qui résultoit d'une très-longue suite de Propositions raisonnées & épineuses, sentoit toute la hauteur de cette découverte, & qu'il l'admiroit par les mêmes endroits qui enthousiasmoient M. Huguens. Il est au reste singulier, que l'Auteur remarque que les *mêmes caracteres* & le même raisonnement servent pour les deux quadratures; ce qui joint avec cette autre remarque que l'unique diversité qui s'y trouve, vient *d'une transposition de parties* dans l'hyperbole, peut faire penser à ceux qui n'ont pas lû l'Auteur, & qui sont prevenus

pour le calcul, que toute cette affaire consiste dans un calcul algebrique, composé des mêmes lettres pour les deux quadratures, avec la seule diversité des *signes plus & moins.*

Il est pourtant vrai qu'il n'y a ici aucun calcul, si ce n'est enveloppé, & comme en puissance. Mais cela même montre évidemment que, si l'Auteur qui sçavoit bien l'Algebre, & pour le moins l'Arithmetique, & qui étoit bien au fait des Series, dont il étoit l'inventeur, avoit daigné exprimer cette découverte par le calcul, comme il l'a fait pour quelques autres, il n'auroit pû nous donner pour les deux quadratures que la même expression Analytique composée des mêmes chiffres ou lettres *iisdem prorsus caracteribus*, avec la seule diversité des signes qui marquent le transport des parties à des côtés opposés, *quod ad aliam partem translata sit.*

L'hyperbole est une courbe singuliere. Gregoire de S. Vincent en connoissoit toute la singularité: Aussi est-ce celle à laquelle il paroît s'être le plus attaché. Il a quarré un espace infini renfermé entre deux hyperboles concentriques. Les *Logarithmes Hyperboliques*, sont une découverte que le calcul s'est attribuée avec le plus de complaisance. Elle est, sans aucun mélange de calcul, de *Sarassa* Disciple de Gregoire qui en avoit jetté tous les fondemens, de l'aveu de Sarassa, en épuisant la matiere des *Quadrilateres & des Secteurs hyperboliques*; dont on connoît d'ailleurs l'importance pour la résolution des *Problêmes Physico-Mathematiques*, de ceux, sur-tout, qui regardent les chutes des corps, leurs mouvemens di-

verſement accelerés & retardés, les denſités des milieux, leurs reſiſtances, &c. comme on peut le voir dans le ſublime Ouvrage des *Principes Mathematiques de la Philoſophie naturelle*, & dans pluſieurs beaux morceaux des *Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris.*

La ſymbolization de la Spirale d'Archimede avec la Parabole d'Apollonius, eſt la découverte favorite de notre Auteur, & une de celles que les nouveaux calculs ſe ſont appropriées des premieres, & qui lui ont le plus ouvert la porte à la comparaiſon des courbes. Car avant Grégoire on ne connoiſſoit pas ou preſque pas la *Géometrie comparée*, qui eſt la grande clef des découvertes : & du reſte il n'étoit pas aiſé de deviner que la Spirale qui eſt d'un ordre tranſcendant, ne fût qu'une parabole, qui eſt une courbe du premier ordre, mais repliée & enveloppée, dont l'axe eſt circulaire.

Cependant Gregoire a exactement demontré, que tout ce qu'Archimede avoit découvert de la Spirale convenoit à la parabole; que tout ce qu'Apollonius avoit dévouvert de la parabole, convenoit à la Spirale ; que mille autres proprietés leur étoient communes. Mais la rectification hypotetique du cercle par la tangente de la Spirale étoit une découverte d'Archimede, que toute l'antiquité avoit admirée, & que les modernes regardent encore comme de la plus haute eſpece. Ils ont regardé comme parallele à cette découverte, celle de la même rectification par la tangente de la parabole : ils ne la connoiſſent la plûpart que ſous l'enve-

loppe du calcul. Elle n'eſt qu'un trait de la ſymbolization des deux courbes en queſtion, & Gregoire ſeul en eſt le premier inventeur. Ce ſont pourtant là des faits précis & Géometriques.

Le plus merveilleux de tout ceci, c'eſt que Gregoire de S. Vincent, modeſte, & non moins exceſſivement admirateur des Anciens, ait mis une Preface exprès à la tête de cette ſymbolization pour prouver qu'Archimede n'avoit pû l'ignorer; & que dans la Préface générale de ſon Ouvrage il en parle ſur le même ton; qu'en divers autres endroits il s'obſtine, juſqu'à fatiguer le Lecteur, de la rapporter à Archimede, quoique les plus habiles Géometres de ce tems-là lui euſſent proteſté, après avoir bien éxaminé la choſe, qu'Archimede n'y avoit pas penſé; que s'il l'avoit ſçû, il n'auroit pas manqué de s'en parer, comme d'une découverte qui ne le cédoit à aucune des ſiennes, mais qu'il n'avoit pas dit un mot qui fît ſoupçonner qu'il en eût la moindre idée.

Qu'on compare ce procedé avec celui de ceux qui ont embelli leurs Ouvrages de ce morceau ſublime, ſans faire aucune mention, ni d'Archimede, ni de Gregoire de S. Vincent; & l'on verra dès ce moment s'accomplir l'Oracle ſacré, que celui qui s'humilie ſera exalté, & que celui qui s'exalte ſera tôt ou tard enfin humilié. Mais ſans humilier perſonne, on ſe contente ici d'éxalter un homme que perſonne n'a eu droit d'humilier, & que les gens d'honneur aimeront ſans doute à dédommager par leur reconnoiſſance, de l'ingratitude de ſon ſiecle ou du ſuivant.

Mais pour la force de l'invention, nulle découverte ne le diſpute à la *cubature des onglets*, & à la *quadrature de leur ſurfaces à double courbure*. Le calcul n'a pas manqué de s'en ſaiſir, & divers Auteurs ont paru ſur les rangs pour en partager la gloire, c'eſt-à-dire, celle d'une ſeconde invention, quoique ſans aucune mention du premier inventeur.

La ſymbolization de l'onglet inſcrit dans un priſme, & circonſcrit à une pyramide, avec la ſphere inſcrite dans un cylindre, & circonſcrite à un cone, eſt un morceau qui va pour le moins de pair avec la découverte du grand Archimede ſur la comparaiſon des trois derniers corps, dont il voulut qu'on ornât ſon tombeau.

Le cylindre, la ſphere & le cone, ſuivant Archimede ſont dans le rapport des nombres 3, 2, 1. Le priſme, l'onglet, la pyramide ſont, ſuivant Gregoire de S. Vincent dans les mêmes rapports; & tous les autres points de comparaiſon établis par le Géomettre de Syracuſe, entre les trois corps reguliers mentionnés, ſont établis par notre Géometre Flamand, entre ces trois corps bizarres & tout-à-fait irreguliers. Car l'onglet eſt une portion de cylindre coupé de biais, & une eſpece de bec de flute, renfermé par trois ſurfaces, deux plates, l'autre courbe; l'une demi circulaire, l'autre demi elliptique, & la troiſiéme bizarement cylindrique.

Or les mêmes ou de pareilles ſymbolizations établies entre ces ſolides, ſe ſoutiennent entre leurs ſurfaces reſpectives, c'eſt-à-dire, entre la théorie de notre Auteur d'un côté, & celles de *Pappus* & *d'Ar-*

chimede de l'autre côté. On a voulu en dernier lieu que Descartes fût encore le seul Auteur qui eût touché aux courbes à double Courbure. Quel interêt a-t-on donc d'attribuer tout à Descartes, au préjudice des legitimes possesseurs? C'est qu'en attribuant tout à Descartes, on s'attribue tout à soi-même, rien n'étant plus facile ensuite que de dépoüiller celui à qui rien de tout cela n'appartient; au lieu qu'en citant Gregoire, & après lui *Laloubere*, on se reculeroit au troisiéme degré d'invention.

Tous les problêmes au reste qui avoient arrêté les anciens Géometres, ce grand Géometre, ou les résolut, ou en porta la résolution au point où les calculs modernes les laissent jusqu'ici : ce qui démontre absolument qu'il a ébauché, & plus que cela, toutes les nouvelles découvertes Géometriques, & que le calcul n'a gueres fait qu'épuiser les mines ouvertes par ce génie vraiment inventeur.

Il termina tout d'un coup les grandes disputes sur l'*angle de contingence*, en faisant voir que l'angle du rayon avec la circonference du cercle étoit droit, & le même par conséquent qu'avec la tangente, confonduë à sa naissance avec cette circonference, & cela dans un petit, comme dans un grand cercle.

Les plus anciens Géometres, fort resserrés dans leur théorie, & bornés à la connoissance des deux especes de lignes les plus simples que nous ayons, la droite & la courbe circulaire, avoient érigé leur imperfection même en principe, & posé une borne que l'antiquité toute entiere jusqu'à Descartes & à

Gregoire n'avoit pû franchir. C'étoit de ne regarder comme Géometriques que les problêmes qui se construisoient par la regle & par le compas, c'est-à-dire, par la ligne droite & par le cercle. Descartes comprit & décida qu'on pouvoit franchir cette borne, & Gregoire de S. Vincent la franchit cent & deux cent fois.

En particulier la *duplication du cube*, connuë sous le nom de *Mesolable*, ou de *deux moyennes proportionelles*, problême proposé par l'*Oracle* même de *Delphes*, pour embarasser les Géometres, & pour la destruction du genre humain, étoit regardée comme un *problême insoluble*, parce qu'il étoit insoluble par la regle & le compas. Gregoire le résolut sans façon, & de vingt & trente manieres differentes, par la construction de deux sections coniques, il en fit autant de la *trisection de l'angle*, qui étoit aussi dans l'antiquité un problême insoluble. La Serie que cet Auteur assigna dans son Traité des Progressions infinies, Prop. 107, *cor. pag.* 112, pour cette trisection, est d'un artifice admirable & a été bien remaniée par le calcul.

Il a encore plus remanié la résolution du fameux *Problême de Zenon*, qui avoit tenu en échec non-seulement toute la Géometrie, mais la Philosophie même des Anciens. Par sa difficulté ce problême alloit de pair avec le célebre *nœud gordien*, & on lui avoit donné le nom d'*Achille*. On avoit même fait entrer Achille dans son expression pour marquer qu'il étoit insurmontable ou irresoluble, comme ce grand Capitaine étoit invincible. Ce fut Gregoire

ſeul qui le premier vainquit cet *Achille de Zenon*, en réſolvant le problême, à la *pag.* 201, *Schol.* de la *Prop.* 87, *du Traité* cité des *Progreſſions Géometriques.* On a bien vanté cette réſolution, au profit d'abord du calcul, mais deſormais à celui de notre Auteur.

Nous ne finirions pas ſi nous voulions detailler toutes les richeſſes d'un Auteur plus connu que célebre, & en qui tout ſemble paradoxe : Car on peut dire, qu'il n'a jamais été plus célebre que lorſqu'il a été le moins connu, ni jamais plus connu que lorſqu'il a été le moins célebre. De ſon vivant les critiques qu'on en fit le rendirent très-célebre : à meſure qu'on le connut mieux, on ceſſa de le critiquer, on en profita, chacun s'en appropria ce qu'il trouva le plus à ſa bienſéance ; & comme ſi on s'étoit donné le mot, on ceſſa de le citer & on ne chercha, en quelque ſorte, qu'à l'enſevelir dans l'oubli ; & le nom de Deſcartes, à qui les François eurent la reconnoiſſance de rendre enfin juſtice, ſembla faire diſparoître tous les autres noms, au moins pour un tems. Le malheur de Gregoire de S. Vincent, ſi c'en eſt un, fut qu'il ſe trouva ne tenir, ni à une nation, ni à un corps, ni à une ſecte fort jalouſe d'une pareille gloire.

Il étoit difficile cependant que parmi tant de bouches ouvertes pour élever la Géometrie moderne juſqu'aux nuës, il ne s'en trouvât de ſinceres, & qui rendiſſent témoignage en partie à la verité. Outre *Viviani*, *Saraſſa*, *Wolſius*, & bien d'autres, le témoignage de *M. Leibnis* eſt en cette matiere déciſif, &

tout-

tout-à-fait digne de ſa candeur & de ſa probité.

En] 1686, au mois de Juin, ce célebre Auteur rendant compte, dans les *Actes de Leipſic*, des progrès de la Géometrie & de la découverte des nouvelles méthodes, auſquelles il avoit lui-même tant de part, parle d'abord de la *méthode des indiviſibles de Cavallieri*, qu'il daigne à peine mettre au rang des vûës Géometriques, qui ont donné naiſſance à la nouvelle Géometrie de l'Infini, *ſed Geometria indiviſibilium Cavallieriana ſcientiæ renaſcentis non niſi infantia fuit*. Arrêtons-nous un moment à ce temoignage.

Il eſt fort ſingulier que M. Leibnis, Juge fort éclairé & fort déſintereſſé entre Cavallieri & Gregoire de S. Vincent, traite la méthode de Cavallieri d'enfance, par rapport à la nouvelle Géometrie; tandis que d'un autre côté la plûpart des nouveaux calculateurs ne ceſſent de rapporter toute cette Géometrie, & tous leurs nouveaux calculs, à l'époque préciſe des indiviſibles de Cavallieri. Pluſieurs le diſent comme ils le penſent; mais on peut prouver & demontrer par de bons faits & de bons témoignages que les premiers Auters de ce langage l'ont affecté pour des raiſons qu'on diroit bien s'il le falloit. On ſe contentera de celle qu'on a déja indiquée, qui eſt qu'on a mieux aimé attribuer tout à Cavallieri qui n'y prétendoit preſque rien, qu'à celui qui pouvoit y tout prétendre : On aimeroit bien mieux confier à un enfant qu'à un homme fait, le dépôt dont on voudroit s'emparer ſous-main ſoi-même. Nous retoucherons bien-tôt cet article des indiviſibles.

Après avoir traité ces indivisibles d'enfance de la nouvelle Géometrie, M. Leibnis continuë son Histoire abregée, & dit que trois hommes célebres ont apporté de plus grands secours, *majora subsidia attulerunt triumviri celebres.* Ces trois hommes sont, *M. de Fermat*, François, Conseiller au Parlement de Toulouse, par sa belle méthode des plus grands & des moindres, *Fermatius inventâ methodo de maximis & minimis*; Descartes, François aussi, par son application de l'Analyse Algebrique aux lignes de la Géometrie ordinaire, *Cartesius ostensâ ratione lineas Geometriæ communis .... exprimendi per æquationes*; & Gregoire de S. Vincent, Flamand, par plusieurs belles découvertes, *& Gregorius à S. Vincentio multis præclaris inventis*: A ces trois hommes célebres, M. Leibnis ajoute *Guldin*, dont la découverte est en effet originale, & se rapporte de très-près aux nouvelles méthodes, *quibus egregiam Guldini regulam de motu centri gravitatis addo.*

On doit remarquer que M. Leibnis en attribuant une découverte à chacun des autres, en donna plusieurs à Gregoire seul. M. Leibnis n'étoit pas aussi enthousiasmé de Descartes que ses Panegyristes ordinaires, & ne regardoit pas même le calcul comme une si belle chose, n'ayant pas même d'abord regardé son calcul differentiel & integral, comme il le regarda lorsqu'il en vit quelques autres dans l'extase & dans l'admiration.

Mais c'est sur-tout dans les critiques qu'on fit de notre Auteur, que nous devons retrouver le vrai fonds des éloges qu'il a mérités. Car les Auteurs se

plaignent des critiques, & abſolument ils ont droit de s'en plaindre, parce qu'elles ſont ordinairement pleines de malice & de fiel, ſans preſqu'aucun mélange d'inſtruction & d'utilité ſolide : mais il eſt pourtant vrai que c'eſt le plus grand triomphe des grands hommes. Ce qui eſt ſi vrai que dans ces derniers tems où le rafinement de la critique maligne eſt monté parmi les gens de lettres à ſon plus haut point, on a vû des cabales entieres ſe liguer, même par ſerment, pour ne laiſſer échapper aucun mot de critique, au moins publique, contre les Auteurs & les Ouvrages, auſquels elles en vouloient le plus; & l'on va voir en effet, que la gloire de S. Vincent, comme anéantie par le ſilence affecté de ceux qui ont approuvé ſa doctrine en la copiant, ſe trouve toute pure & brillante dans les monumens que l'envie & l'ignorance n'avoient conſacrés qu'à l'anéantiſſement effectif de cette même gloire, en rejettant ſa doctrine.

Il faut l'avoüer cependant : il étoit réellement trop grand homme, & ſon Ouvrage trop plein & trop nouveau, étoit trop au-deſſus de la portée de ſon ſiecle, pour n'être pas méconnu par ſes contemporains. La Géometrie devroit-elle être ſujette à des chicanes ? Ce fut alors qu'elle commença de l'être, parce qu'elle commença à être une ſcience de calcul. Car tout eſt lié, & la chicane l'a toujours été, même en Géometrie, avec le calcul. N'en faiſons point un crime à Deſcartes, il fut à plaindre lui-même, d'avoir été pendant toute ſa vie la premiere victime de cet eſprit de calcul qu'il venoit de repandre.

Quoiqu'il en ſoit, Gregoire de S. Vincent fut encore plus vivement attaqué, au moins ſur la Géometrie par *Meibon Sylvius*, *Lipſtrop*, *Merſenne*, *AA ××× **. Ce n'étoient pas-là ſes plus dangereux adverſaires, quoique les plus acharnés & les plus importuns : mais *le P. Leotaud Jéſuite*, *le célebre M. Huguens*, *& le grand Deſcartes* lui-même, donnerent beaucoup de célebrité à la diſpute, dont *Aynſcom* preſque ſeul avec *Saraſſa*, ſoutint tout le poids ſous les yeux de leur Maître, qui ne daigna pas s'y prêter ouvertement.

Meibom n'étoit qu'un Grammairien en Géometrie, non plus que dans le reſte de la litterature. Il attaquoit imprudemment tous les Anciens, ſans en excepter Euclide. Plus Gregoire avoit multiplié les découvertes, plus Meibom crut qu'il avoit amplifié les erreurs anciennes. *Hunc verò errorem ampliavit Gregorius à S. Vincentio.* Ce que nous recueïllons de mieux de Meibom, c'eſt qu'il nous apprend, ſans doute, contre ſon intention, le grand éclat des découvertes de ſon adverſaire, & le grand aſcendant qu'elles avoient pris, peu après leur publication ſur tous les eſprits : *Hujus autem*, dit-il, *errores quòd planè inſignes ſint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonſtrandos duxi.* On comprend bien que ce que Meibom qualifie d'*errores*, ne doit être traduit que par le nom de *découvertes*, de *nouveautés ſublimes*, ce qui eſt prouvé, 1°. par le fait même, 2°. *quod totum orbem irretitum teneant.* C'étoit-là un fait hiſtorique dont Meibom étoit bon témoin, & que ſa critique même

* C'eſt par ces deux lettres *AA.* que Gregoire & Aynſcom déſignent M. de Roberval.

conſtate aſſez ; cet homme-là n'ayant attaqué Gregoire, que parce que tout l'Univers l'admiroit & pour ſe donner un illuſtre adverſaire.

Ce n'étoit-là qu'un déclamateur, M. de AA ××× étoit un ſçavant de conſéquence, qui ne manquoit pas de titres, que *le P. Merſenne* annonça à Gregoire, comme un Géometre célebre dans tout l'Univers, *noto toto orbi Geometrâ*, qui étoit comme à la tête de la coterie du tems, qui avoit déja fait le coup de piſtolet avec Deſcartes, que de nos jours on a comme aſſocié à Cavallieri pour la découverte du principe des indiviſibles, & qui enfin avoit toujours le P. Merſenne comme à ſes ordres pour porter à tous les grands hommes qui vivoient alors, des eſpeces de cartels de défi, qui ne furent pourtant pas toujours ſi bien reçûs que chez Grégoire de S. Vincent : car c'étoit un bon homme, ſimple, modeſte, qui ne rebutoit perſonne.

Mais ſi le cartel de M. de AA ××× fut ici bien reçû, il étoit mal adreſſé : & ſi Gregoire étoit bon homme, il étoit impitoyablement Géometre, & il n'étoit pas ſûr de broncher devant lui. L'Ouvrage qu'on attaquoit étoit à l'épreuve, & Aynſcom défendoit ſon Maître avec aſſez de chaleur, & d'un ton ferme, trenchant, joli même & aſſez finement ironique, comme il convient avec des adverſaires trop acharnés.

Le Livre des Proportionalités, comme le plus élementaire, fut preſque le ſeul que AA ××× cenſura ; car ſa critique porta le nom de *Cenſure.* Il y traita ſon adverſaire de haut en bas, ſelon le ſtile

de ces Messieurs, & son Livre, d'inutile, de suranné, d'erroné cependant, & comme contenant 100 Propositions fausses sur 172. Meibom qui n'avoit non plus touché qu'à ce Livre, y comptoit 130 Propositions erronées.

Ils critiquerent les uns & les autres, les exposans commensurables des grandeurs incommensurables, les exposans finis des grandeurs infinies. Croira-t-on que ce Géometre connu de l'Univers alla jusqu'à prétendre, & à soutenir que le rapport d'égalité avoit pour exposant, non l'unité, mais zero? Quelques demi-idées échappées de la doctrine de l'Auteur sur les quadrilateres hyperboliques achevoient d'égarer Mersenne & AA×××: Car voici comme ils raisonnoient. Les quadrilateres en question, sont les exposans du rapport des abscisses, & reciproquement des ordonnées: n'y ayant donc aucun quadrilatere renfermé entre deux ordonnées égales, &c. *Cum inter duas lineas æquales seu potius unicam, nullum spatium includatur hyperbolicum, patet rationem æqualitatis nullam habere quantitatem.* Ces Messieurs avoient bien lû Gregoire pour le critiquer, mais jamais pour l'entendre.

Une chose les revoltoit tous étrangement: c'étoit que l'Auteur exprimât & calculât les rapports comme les fractions, *tot errorum*, disoit M. AA×××, *unica est causa, quod Gregorius à S. Vincentio rationes consideraverit ut fractiones.* Et le P. Mersenne son collegue en critique: comment l'auroient-ils redressé sur l'article? lui qui faisoit de sçavans Volumes d'*Harmonie* dans le faux principe des Musiciens Géometres, qui

pour ajouter la quarte à la quinte, enſeignoient qu'il falloit ajouter leurs rapports, 2, 3, & 3, 4, & qui pour ajouter ces rapports enſeignoient auſſi qu'il falloit les multiplier, corrigeant pourtant par cette ſeconde erreur le vice de la premiere.

Ces chicanes cependant, en conſtatant les propres découvertes de l'Auteur, alloient auſſi au profit de la ſcience, de la part des habiles Géometres, qui en étoient l'objet. Ce furent les critiques de Merſenne en particulier qui nous valurent la belle découverte de Saraſſa : Ces Meſſieurs la firent tout-à-fait éclore à force d'en tourmenter les ſémences. Il y a des plantes ſalutaires qui ne naiſſent qu'à la lueur des éclairs & au bruit des tonneres.

Merſenne au fond n'étoit pas malin : il étoit même ſçavant & ſçavant de bonne foi ; choſe rare alors & depuis ce tems-là, au moins dans la Géometrie. Mais Merſenne avoit la fantaiſie de faire un perſonnage, & de ſe jetter entre les ſçavans les plus diſtingués, ſous le nom de Conciliateur ; ce qui finiſſoit ordinairement par une broüillerie irreconciliable, comme entre Deſcartes & Paſcal. Il falloit ſurtout qne Merſenne dît ſon avis ſur tout ce qui paroiſſoit dans la litterature. Il avoit pourtant la modeſtie & la diſcretion d'en parler le plus ſouvent au nom d'autrui, & en termes généraux pour ne pas trop s'engager.

Enfin il ſe plaignit que pour donner la quadrature du cercle, Gregoire avoit trompé l'attente des Géometres en ſe frayant des routes extraordinaires. *At vero cum neque quadraturam dederit eo modo quo ſolet*

à Geometris expectari : Qu'il s'étoit même jetté dans des ſpeculations plus épineuſes que la quadrature même, *cum in eâ exhibendâ longè quam ipſam quadraturam difficiliora ſupponat vel poſtulet.* Remarquons pourtant que tout le Livre de Gregoire eſt par Propoſitions, rigoureuſement démontrées comme Euclide, ſans demandes ni ſuppoſitions.

Merſenne continuë à dire, apparemment ſans commiſſion, que cet Ouvrage a déplu aux Géometres François, *noſtris Geometricis diſplicuit*, parce qu'il avoit le titre faſtueux de quadrature du cercle, *quòd cum opus ſuum quadraturæ circuli ſpecioſo ſuperboque titulo inſignierit.* Ce titre eſt pourtant tel, *de quadraturâ circuli opus Geometricum :* Ouvrage géometrique, *touchant* ou *ſur la quadrature du cercle.* M. Nevvton a bien donné depuis un Ouvrage avec ce titre de *Quadraturâ curvarum.* Nulle part peut-être Gregoire n'a dit qu'il eût trouvé la quadrature : & tel qui écrivoit contr'elle pourroit bien encore prendre le même titre.

Mais il y a bien de l'injuſtice & de la plus baſſe malignité dans ce que Merſenne ajoute, ſur la foi ſans doute de A A ××× & de P ××× : *Nihil tamen quod ad rem faciat præter id quod in ea re hactenus inventum, protulerit.* Merſenne & A A ××× & P. auroient été bien déconcertés s'ils avoient pû prévoir le grand ſuccès & le grand air de nouveauté ſublime que tout cela alloit prendre à l'aide du *Calcul Carteſien*, dont ils étoient auſſi ennemis que de cette *Géometrie Gregorienne.*

Merſenne termine ſa cenſure, en diſant que cette

cette Géometrie ſe reduit à ce problême non reſolu & plus élevé que la quadrature, ſçavoir, trois grandeurs étant données & les logarithmes de deux étant donnés, de trouver le logarithme de la troiſiéme. *Quippè in illud abit necdum ſolutum problema, quodque forſan longè difficiliorem quàm ipſa quadratura ſolutionem requirit, datis tribus magnitudinibus, &c. datiſque duarum ex illis logarithmis, tertiæ logarithmum Geometricè invenire.*

Or ce fut préciſement ce problême plus difficile que la quadrature du cercle, dont Saraſſa donna tout de ſuite la réſolution après avoir montré cependant qu'il étoit mal & peu géometriquement propoſé, & dans quel ſens il pouvoit être réſolu : & ce fut cette réſolution qui nous valut la pleine découverte des logarithmes hyperboliques, dont voilà l'Hiſtoire.

De tels critiques, comme l'on voit, n'étoient pas trop propres à perſuader à des Géometres de cette ſuperiorité que la quadrature cherchée ne fût pas entre leurs mains. Deſcartes qui connoiſſoit les perſonages & qui n'étoit pas ſi bon homme ni ſi endurant, en écrivit en ces termes de Stockolm à un ami qui lui avoit apparemment rendu compte de cette diſpute.

» Je ſuis à préſent dans un païs ſi éloigné, que » je ne puis pas même eſperer d'y voir les écrits » dont vous me parlez ; car, outre qu'il ſeroit dif» ficile de les apporter ici, je n'y aurois pas auſſi » beaucoup de loiſir pour les examiner. C'eſt pour» quoi ſi vous écrivez au R. P. *Gregorius à S. Vincen-*

» *tio*; je vous prie de l'assurer de mon très-humble » service, & de lui faire sçavoir de ma part que, » bien que je n'approuve pas sa quadrature du cer- » cle, je ne crois pas néanmoins que *le sieur Ægide* » *Roberval* ait assez d'esprit pour la refuter, & ainsi » que pendant qu'il n'aura point d'adversaires plus » forts que cettui-là, il ne lui sera pas mal-aisé de » se défendre.

Aynscom ne rapporte cette Lettre de Descartes à la page 108 de son *Expositio ac deductio Geometrica*, imprimée à Anvers, que pour contrebalancer le *noto toto orbi Geometra* de Mersenne, & son *nostris Geometricis displicuit*, en faisant voir que Descartes, quoique François, *homo gallus*, & habile Algebriste, *Algebrista egregius*, pensoit bien differemment de Mersenne, sur le compte du sieur A A***, ou *Ægide Roberval*, qui est le mot de l'Enigme.

Car du reste, Gregoire, Sarassa, Aynscom & toute cette école Flamande renouvellée de celle de Syracuse, faisoit peu de fonds sur le suffrage de Descartes, qu'ils qualifioient volontiers de *Algebrista egregius*, mais qu'ils auroient peut-être eû peine à traiter de Géometre ordinaire; tant les idées des hommes sont differentes, tant aussi on a excedé dans les panegyriques qu'on a faits de ce grand homme, qui n'a pourtant de grandeur en Géometrie, que celle qui lui revient de l'application qu'il a faite de son Algebre à cette science; en quoi, pour le dire franchement, il a rendu un plus grand service à l'Algebre qu'à la Géometrie. Nous verrons bientôt la petite guerre qui resulta de-là entre les deux

écoles, celle de Gregoire & celle de Defcartes, c'eft-à-dire,celle d'Archimede & celle de Diophante.

Il nous refte un article important à difcuter dans la cenfure de Merfenne & de A A*** : il y avoit de l'animofité dans leur fait. Aynfcom à la page 28, rapporte une Lettre de Gregoire aux deux Cenfeurs, dans laquelle on voit éclater une nobleffe de fentimens, une liberté de penfées, une modeftie, un ménagement, une charité d'expreffions qui devoient lui gagner le cœur & l'eftime de fes critiques. Point, tout les encourageoit à ofer de plus en plus, & le merite fuperieur d'un tel adverfaire, interdifant tout efpoir d'égalité, ne laiffoit à des rivaux jaloux que l'amertume dans le cœur, l'erreur dans l'efprit, & le fiel dans le ftile.

A force de ronger ils entrevirent dans l'ouvrage fur lequel ils s'acharnoient, un air de methode d'indivifibles : ce n'étoit point elle, c'étoit la méthode d'exhauftion d'Archimede, mais auffi-tôt, fans prendre garde que l'auteur l'attribuoit pleinement à Archimede, Merfenne prit la plume pour accufer de Plagiarifme l'homme du monde le moins digne d'un pareil reproche. *Neque meminerit*, dit-il, *ullatenus Geometriæ per indivifibilia eruditiffimi Bonaventuræ Cavallerii*, *&c.* On aime à voir ces Meffieurs prodiguer les éloges à Cavallerius qui en merite en effet de très-grands, mais pas un feul au préjudice de Gregoire, pour qui il n'en échappe pas feulement un mot aux deux célebres diftributeurs du mérite Géometrique. On fçait de quoi cette cabale étoit capable, & la feule édition du prétendu manufcrit

d'*Ariſtarque de Samos*, pour enlever d'un ſeul coup à Deſcartes ſon ſyſtême géneral de Phyſique, montre leur ſçavoir-faire en ce genre.

Comme cependant toutes ces chicanes n'ont pas laiſſé de jetter un voile ſur l'Hiſtoire litteraire, Gregoire de S. Vincent n'ayant eû ni ſecte ni cabale depuis près d'un ſiecle pour faire valoir ſes droits, & que l'on a pris le train d'enter la nouvelle Géometrie ſur les indiviſibles malgré l'évidence du fait contraire, malgré la proteſtation de M. Leibnis, malgré le tort que cela faiſoit à la Géometrie, ſoit en l'expoſant à mille fauſſes lueurs, ſoit en lui ôtant ſa certitude & ſon évidence, ſoit en la décriant auprès des eſprits foibles, comme Philoſophique & conjecturale, il faut une bonne fois diſcuter un point que toutes ces chicanes, ces mépriſes, ces manques de bonne foi ont couvert des plus épaiſſes ténebres, & rendu infiniment difficile à éclaircir.

La difficulté en eſt telle que les plus honnêtes gens & les plus clairvoyans s'y ſont mépris, & ont aidé à l'impoſture en s'y laiſſant prendre, & que M. de A A *** même le plus grand ennemi des nouvelles methodes naiſſantes qu'il y ait eu, a trouvé le ſecret de ſe faire citer en dernier lieu * comme un de ceux qui y avoit le plus contribué, en mettant la main à la découverte des indiviſibles. Mais cette prétention eſt ſi frivole que Merſenne même l'a ignorée. Car s'il en avoit eu la moindre idée, le moindre ſoupçon, il étoit trop ſenſible à l'amitié & trop curieux d'enfler ſon rôle d'Editeur d'Anectotes litteraires, & de Cenſeur de nouveaux Ouvrages,

* Elemens de la Géometrie de l'Infini, *Pref.*

pour passer ceci sous silence. Sans doute que AA*** ne se coëffa de cette chimere qu'aprés la mort de Mersenne.

Quoiqu'il en soit, celui-ci crut retrouver la méthode des indivisibles dans l'ouvrage géometrique de la quadrature du cercle, & il intenta à l'Auteur l'accusation de Plagiarisme; comme si, quand le fait seroit vrai, il ne suffisoit pas que parmi les découvertes que Gregoire s'attribuoit, ou qu'on lui attribuoit, il ne fût jamais parlé de celle de Cavallerius. Or jamais cet Auteur, ni ses Disciples, ni personne, hors Mersenne, n'a dit que la méthode des indivisibles se retrouvât dans l'ouvrage en question. Ils ne l'ont pas dit, & ils n'ont pû le dire, parce que cette méthode n'y est pas, & s'il faut le dire, n'étoit pas digne d'y être.

Cette méthode étoit une vraie enfance & un bégayement, si l'on veut, de la science renaissante, selon M. Leibnis. L'enfance est ordinairement naïve, ingenieuse, mais peu exacte & peu développée, la Géometrie de Cavallieri a tous ces traits. Elle est ingenieuse sans difficulté, mais si embroüillée, si emmaillottée en quelque sorte, si peu géometrique, si philosophique, que jamais la Géometrie ne l'auroit adoptée, si on n'avoit trouvé ailleurs de quoi la corriger & l'éclaircir: *illa falsa*, dit Ainscom, *nisi alio reducatur; ut à pluribus ostensum est.*

Une preuve évidente que la méthode de Gregoire est fort differente de celle de Cavallerius, c'est que tous les Géometres ayant rejetté celle-là, celle de Gregoire a tout d'un coup passé sans que personne

ait même incidenté ni reconnu le moindre rapport des deux méthodes, ſi ce n'eſt Merſenne, qui voyant le ſuccès de cette derniere, s'eſt aviſé de la vouloir confondre avec l'autre pour l'attribuer à celui des deux Auteurs qui piquoit le moins ſon émulation.

Une nouvelle preuve, & en même tems une choſe tout-à-fait de conſéquence à ſçavoir, & qu'on eſt bien fâché d'avoir apperçuë ſi tard : c'eſt que les nouvelles méthodes en ſont là encore, que toutes les fois que l'on les preſente dans le point de vûë de Gregoire de S. Vincent & d'Archimede, elles ne trouvent aucune contradiction, & que c'eſt par-là qu'elles entraînent dans leurs concluſions les plus habiles Géometres; au lieu que dès qu'on fait luire, comme on ne le fait que trop, le côté Philoſophique des indiviſibles, auſſi-tôt tout le public & pluſieurs Géometres ſe révoltent, & crient au Paradoxe ! à la contradiction ! à l'erreur !

Ainſcom caracteriſe aſſez bien les deux méthodes. *Illa*, dit-il, *additione infinitorum indiviſibilium, ut ſic, procedit : hæc ductum rectangulorum in invicem verè geometricum ſeu multiplicationem continet*. Voilà la difference, la même qu'entre l'addition & la multiplication, *l'addition numerique & la multiplication géometrique*, qu'entre un Arithméticien & un Géometre : ce qui démontre de plus en plus la juſteſſe du jugement de M. Leibnis, l'Arithmetique n'étant que l'enfance de la Géometrie, & l'addition une eſpece d'enfance par rapport même à la ſimple multiplication, comme la ſouſtraction par rapport à la diviſion.

Illa, continuë Ainſcom, *ab una ſpecie quantitatis ad*

aliam nec geometricè nec demonstrativè procedit, hæc geometricâ vereque archimedæâ perficitur exhaustione. Après tout les deux méthodes ſont la méthode d'Archimede, l'une manquée, & l'autre élevée plus haut. Cavallerius a voulu prendre cette méthode d'Archimede, mais la Géometrie lui a manqué plutôt que le génie, car il paroît en avoir eu beaucoup : mais il n'a ſaiſi la choſe que par un petit coin ; elle lui a comme échappé en la ſaiſiſſant : au lieu que Gregoire a comme empoigné, comme embraſſé l'ancien ſiſtême dans toute ſa plenitude, avec cette force de génie & cette capacité géometrique qui l'égale à Archimede, lors même qu'il en emprunte quelque choſe.

Auſſi doit-on bien remarquer que la méthode de Cavallieri n'a été entre ſes mains qu'une petite méthode, une méthode de doctrine plutôt que d'invention. C'étoit comme un petit filet d'eau détourné, ſuffiſant à peine pour la culture du petit nombre de découvertes que l'antiquité avoit miſes au jour. Tout ce qu'a pû faire ſon Auteur par ſon moyen, a été de remanier par cette maniere, par cette façon les anciennes découvertes ; & en paſſant on remarquera que tous ceux qui s'en ſont tenus à la premiere idée des indiviſibles, n'ont jamais pû s'élever plus haut qu'à la ſeconde ou troiſiéme façon des vérités déja découvertes par d'autres : au lieu que la méthode d'Archimede, élevée par celle de Gregoire, a paru un grand fleuve, plein & abondant qui du premier pas a rempli deux *in-folio* pour le moins de vérités toutes neuves & de l'ordre le plus élevé.

Tout cela revient toujours au témoignage de

M. Leibnis, l'enfance n'étant en aucun genre l'âge de rien enfanter, & ne pouvant jamais, quelque nourriture qu'elle prenne, s'élever au-dessus de sa propre substance. Mais à ce témoignage clair & bien prononcé de M. Leibnis, nous ajoûterons le procedé précis & géometrique de M. Nevvton. Il faut croire que les deux Auteurs prochains & immédiats de la nouvelle géometrie, auront connu la vraye base sur laquelle elle s'est élevée, la vraye source d'où elle a découlé.

C'est cette base, c'est cette source que ce celebre Geometre Anglois établit & constate lui-même en 11. lemmes generaux, dès la premiere section de son premier livre des Principes Mathematiques de la Philosophie naturelle, où, sans presqu'aucun calcul, il se sert constament de la nouvelle Geometrie pour la découverte & la démonstration de la belle & profonde science Physico-Mathematique dont il est comme le Createur.

Il donne ces lemmes sous le titre de Methode des premieres & dernieres raisons propres à démontrer toute la suite de son Ouvrage, *de methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur*. Comme cette section est toute parallele à ce que Gregoire appelle la troisiéme partie des *ductus*, on remarquera ce titre, *tertia pars universales quasdam continet Propositiones, reliquis planè fundamentales, quibus corpora ex ductibus orta inter se comparantur*. On va voir le grand rapport de ces deux titres, & qu'ils annoncent le même dessein, & le même but Géometriquement immédiat: Car Nevvton va ensuite plus

plus loin, à un but Physico-Mathematique, qui est son unique but dans ce bel ouvrage.

Gregoire termine cette troisiéme Partie par une Scholie où il dit que son principe ou sa théorie est très-universelle, & que pour éviter les répetitions & l'ennui, il a voulu y renfermer en peu de mots toute l'affaire de l'exhaustion. *Theorema jam demonstratum universalissimum est ... ne igitur idem discursus in singulis propositionibus labore inutili, & cum molestiâ lectoris repetendus esset, placuit totum exhaustionis negotium, &c.*

M. Nevvton termine de même la section lemmatique par une scholie, où il dit qu'il a mieux aimé donner ces lemmes pour éviter l'ennui des démonstrations *ad absurdum* des Anciens : *Præmisi verò hæc lemmata ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum.* Or quelles sont les démonstrations que les Anciens réduisoient à l'absurde, si ce n'est celles qui regardent l'affaire de l'exhaustion? Le but présent des deux Auteurs, est donc d'ériger en théorie directe & génerale l'exhaustion ancienne, & ils sont parfaitement paralleles dans leur titre initial, & dans leur scholie finale. Il s'agit sur-tout de la théorie mitoyenne.

M. Nevvton déclare lui-même que la méthode qu'il a fait regner n'est point celle des indivisibles ; parce que cette méthode est trop dure & une pure hypothese philosophique, *durior est indivisibilium hypothesis*, & qu'elle n'est pas assez Géometrique, *& propterea methodus illa minus Geometrica censetur* : ce qui l'a obligé de recourir aux premieres & aux dernieres

raiſons des quantités naiſſantes & évanoüiſſantes : *malui demonſtrationes rerum ſequentium ad ultimas evaneſcentium ſummas & rationes, &c.* Il n'eſt donc plus queſtion que de voir ce qu'il entend par ces premieres & dernieres ſommes & raiſons.

La méthode d'Archimede étoit une inſcription & une circonſcription de Poligones à l'infini, qui ſe confondoient enfin en derniere raiſon avec la courbe. La méthode de Gregoire procede auſſi par les Poligones inſcrits & circonſcrits, mais par les derniers qui ſe confondent avec la courbe : & M. Nevvton ne parle non plus dans ſes lemmes que d'inſcriptions & de circonſcriptions indefinies de Polygones confondus, *ultimò, in ultimâ ratione* avec la courbe. Eſt-il queſtion de rien de pareil dans la méthode de Cavallieri ?

Mais les Poligones du Géometre de Syracuſe ſont des Poligones ordinaires, inſcrits par leurs angles & circonſcrits par leurs côtés, des Poligones concaves en dedans, convexes en dehors, ou dont tous les angles ſont ſaillans. Difference eſſentielle par où la méthode Flamande s'éleve au-deſſus de la Sicilienne, ou de la Grecque qui lui ſert de baſe. Les Poligones de Gregoire, tant les inſcrits que les circonſcrits, ont leurs angles alternativement ſaillans & rentrans en forme d'échelons ou de marches d'eſcalier. Trouve-t-on rien de pareil dans la méthode Italienne des indiviſibles ? Mais on le trouve & préciſément le même dans la méthode Angloiſe, & en général dans toute la méthode, moderne, Françoiſe, Allemande, Européenne en un mot.

L'œil même ne peut s'y méprendre. Qu'on envisage les figures des lemmes Nevvtoniens, sur-tout des quatre ou cinq premiers, on les verra précisément les mêmes que celles de la troisiéme partie du *Ductus* Gregorien. Or les Propositions sont les mêmes, les conclusions les mêmes, le raisonnement le même : Les figures inscrites & circonscrites differant entr'elles par une somme de plusieurs petits rectangles dans l'une & l'autre méthode, & les deux Auteurs s'attachant également à prouver que cette somme est égale à un rectangle qui a été fait, dans la construction, moindre qu'une grandeur donnée, *dato minus*, dit l'un & l'autre Auteur.

Et de-là l'un & l'autre, multipliant les petits rectangles à l'infini, concluënt que le rectangle qui leur est égal, & qui est l'excès de la figure circonscrite sur l'inscrite, est infiniment petit, nul, ou *minus quam datum quodvis*, dit Nevvton, ou *minus quocumque dato*, dit Gregoire. Et de là encore ils concluënt enfin que les trois figures, l'inscrite, la circonscrite & la courbe mitoyenne sont égales, dit le Géometre Flamand, *in ratione ultimâ æqualitatis*, dit le Géometre Anglois, ou *ultimo æquales*.

Remarquons au reste, que quiconque liroit M. Nevvton d'un œil distrait, ou ignorant, ou malin, & le verroit tranché par tout de rectangles infiniment minces qui remplissent les figures inscrites & les circonscrites, s'imagineroit facilement qu'il suit la méthode des indivisibles, tandis qu'il nous avertit lui-même qu'il ne la suit pas à cause de son caractere dur, hypothetique & peu géometrique. Mer-

ſenne n'a point eu d'autre raiſon pour croire que Gregoire avoit ſuivi cette méthode. C'eſt ainſi que nous avons vû qu'on avoit crû le Livre des Principes de M. Nevvton tout plein de calcul. Qu'il y a peu de Lecteurs qui liſent dans un Livre ce qu'ils y liſent en effet ! & qu'en Géometrie, ſur-tout, il eſt rare qu'on ait les idées préciſes de ce qu'on croit ſçavoir le mieux, & dont on ſe mêle ſouvent de décider même en Auteur dogmatique!

Une remarque plus importante & plus inſtructive que celle-là, c'eſt que la ſeule forme des Poligones inſcrits & circonſcrits de Gregoire de S. Vincent, cette forme d'échelons qui ne paroît rien, a été déciſive pour la naiſſance des nouveaux calculs, le differentiel & l'integral, & pour toutes les méthodes analytiques des tangentes, de *maximis & minimis*, des perpendiculaires, des quadratures, des rectifications qui en dependent. Peut-être tout cela ſeroit-il à naître encore ſi la méthode en étoit reſtée aux Poligones paralleles d'Archimede, qui ne different de la courbe que par des ſegmens mixtilignes, ou aux ſimples indiviſibles de Cavallieri, dont pour cette raiſon préciſe la méthode étoit infeconde, & une pure méthode de doctrine.

Mais dès que les Polygones inſcrits furent à échelons, la figure même preſenta d'un côté un rectangle qui étoit l'élement de la quadrature de la courbe, ce qui donna le calcul integral, & de l'autre côté un petit triangle dont les deux côtez interieurs étoient la décompoſition naturelle des côtez infiniment petits de la courbe ; exprimant leur poſition

oblique, les angles du Polygone, la position des tangentes, & la rectification même élementaire de cette courbe, d'où résulta le calcul differentiel & tout ce que les nouveaux calculs ont de plus merveilleux.

On a beau dire, beau vanter les nouveaux calculs comme s'ils étoient tombés du ciel, ou inspirés par revelation, ou dûs à un rare & puissant effort d'imagination. On n'invente que de proche en proche, & les plus hautes découvertes sont les mieux preparées. Dès que le petit triangle infinitesimal eût paru entre la Courbe & le Polygone à échelons, le celebre *Barrow* le remarqua, & les très-celebres *Newton* & *Leibnis*, sans avoir eû trop besoin de se donner le mot, le mirent en calcul, suivant la maxime Cartesienne qui avoit prévalu, de tout mettre en calcul; maxime même déja appliquée aux Infiniment petits par l'illustre *M. de Fermat*, & même à ce petit triangle par Barrovv.

Aynscom a quelque chose encore à nous dire en réponse à son P. Mersenne au sujet de l'accusation de Plagiarisme. C'est que la méthode de Gregoire de S. Vincent étoit publique & publiée avant celle de Cavallieri : Voici le fait. Gregoire étoit extêmement vieux lorsqu'il donna son grand ouvrage, & on comprend bien que la plûpart des grandes parties de cet ouvrage, & sur tout sa grande & primitive méthode *de Ductu* devoient être faites long-tems avant qu'il les publiât.

Aynscom atteste que le livre *de Ductu*, où est cette méthode, fut composé en 1621; que deux ans après, c'est-à-dire, en 23, l'Auteur l'envoya à Rome à

Griembergerus ſon ami & habile Geometre pour l'examiner : choſe dont les lettres de celui-ci font foi avec bien des témoins qui vivoient lorſqu'Aynſcom écrivoit ; entr'autres un certain *Guillaume Boelmans* Diſciple de Gregoire, lequel Boelmans étant Profeſſeur de Mathematique, fit en 1634, imprimer une theſe dans laquelle il quarroit la Parabole par la Méthode *de Ductu* de ſon Maître.

Ainſi la Methode qu'on veut avoir été priſe de Cavallerius, a été compoſée 14 ans, envoyée à Rome 12 ans, ſoutenuë en theſe, & publiée un an, avant que celle des indiviſibles ait paru. Car la date du livre de Cavallerius eſt de 1635 : cela eſt bien déciſif, & fait bien voir l'injuſtice de Merſenne, & de tous ceux qui ont affecté d'embroüiller ce point d'Hiſtoire. Car on l'a affecté & très-affecté ; on en a les preuves en main qu'on produira pour peu qu'on en ſoit requis, ou forcé par quiconque s'obſtineroit déformais de perpetuer la même injuſtice.

Après cela comment ſoupçonner un homme qui a fait un nombre innombrable de découvertes très-ſuperieures à celle des indiviſibles, de s'être rendu plagiaire pour ſi peu de choſe. Car cette méthode d'Exhauſtion, la ſeule choſe par où Gregoire reſſemble un peu à Cavallerius, n'eſt que la moindre partie de la méthode *de Ductu*, qui conſiſte à former les corps & de très-nouveaux corps à double courbure par la multiplication de divers plans diverſement poſés à plomb les uns à côté des autres : multiplication locale & de tête qui embraſſe la generation des corps par le gliſſement d'un plan ſur un autre, & va beaucoup au-delà.

Or cette méthode encore *de Ductu* n'eſt pas elle-même la moitié de la grande & generale méthode de l'Auteur, laquelle embraſſe pluſieurs méthodes toutes grandes, mais moins generales; celle des proportionalités, celle du calcul des rapports, celle des ſeries geometriques, celle de comparaiſon, ou comme il l'appelle, de ſymbolization, &c. La vérité perce tôt ou tard. Il viendra donc un tems où on ne pourra croire l'excès d'injuſtice que le ſiecle précedent a fait à cet Auteur, ni comment on a pû s'y méprendre en faveur d'une infinité de petits Auteurs qu'on a enrichis ou qu'on a ſouffert qui ſe ſoient enrichis de ſes dépoüilles. Qu'on fouille, qu'on creuſe, qu'on compare; plus on étudira le détail de tout ceci, plus on admirera cet Auteur: car nous ne pouvons en parler encore qu'en general & d'une maniere aſſés vague. C'eſt une mine & un vrai Perou. Venons à la diſpute de Deſcartes & des autres.

Ce fut *Daniel Lipſtorp de Lubec* qui l'engagea, & qui la ſoûtint avec aſſez peu de ſuccès pour lui & pour ſon maître, qui ſe ſeroit bien paſſé de ſe commettre avec des gens de la force de ces Géometres Flamands. Car dans ſa Lettre de Stockolm, Deſcartes, en faiſant des civilités à Gregoire, & en rabaiſſant beaucoup devant lui le ſieur *Ægide Roberval*, comme un homme de peu d'eſprit & un trop foible adverſaire, s'étoit contenté d'inſinuer qu'il n'approuvoit pas la quadrature du cercle de l'ouvrage géometrique, ce qui n'engageoit aucune diſpute. En effet, la choſe en étoit reſtée là, & Ainſcom

même avoit rendu la politesse à Descartes en le qualifiant de *Algebrista egregius*. Mais Lipstorp, se mettant imprudemment entre Descartes & Gregoire,. comme font volontiers les Disciples des grands Maîtres pour se signaler, Lipstorp parla & fit parler son Maître, & la guerre fut aussi-tôt declarée.

Ces paroles indiscrettes de Lipstorp se trouvent dans ses *Specimina Philosophiæ Cartesianæ*, imprimés en 1653. S'il se fut contenté d'y loüer Descartes absolument & sans aucune comparaison odieuse, il ne pouvoit en trop dire. Descartes est sans difficulté un très-grand Homme, grand Métaphisicien, grand Dialecticien, grand Physicien, sur-tout, grand Algebriste au reste, & même grand Géometre. Car il étoit lui-même plus solidement Géometre que n'ont voulu l'être ses Sectateurs trop asservis au calcul. Mais un Disciple ne se modere gueres sur la gloire de son Maître, persuadé que l'éclat en rejaillit sur lui, d'autant plus qu'il est plus vif.

Lipstorp disoit entr'autres choses que » ce qu'il y » avoit d'admirable dans Descartes, étoit que par » la singuliere pénétration de son esprit, il avoit pû » sans difficulté déterminer ce qui étoit pénétrable » ou impénétrable à l'esprit humain, & si un pro- » blême étoit possible ou impossible : *quid humano in-* » *genio pervium esset, quid non; an problema aliquod possi-* » *bile esset, an minus.* C'est pourquoi, *ajoûtoit Lipstorp*, » ce grand homme n'a jamais touché à ce problê- » me si ressassé de la quadrature du cercle : Car il le » connoissoit si rebele & si herissé que c'étoit perdre » sa peine & son tems que d'en chercher la solution.

» Desorte

» Deſorte que le vaſte ouvrage de Gregoire de S.
» Vincent ne l'ayant arrêté que trois jours, il y dé-
» couvrit la ſource erronée unique d'où toutes les
» autres erreurs ont découlé, *unicum in eo erroris fon-*
» *tem, ex quo reliqui omnes promanarunt, notavit.*

Cette critique, pareille à celles qui ſont le plus à la mode de nos jours, étoit infiniment cavaliere & offenſante, étant abſolument denuée de preuves, & tout-à-fait du goût de celle de Merſenne. On ne traite point comme cela un Auteur reſpectable, & un Ouvrage ſi plein de ſublimes découvertes. On ne ſçait point comment Gregoire de S. Vincent prit la choſe. Mais le Diſciple de Deſcartes trouva dans Ainſcom un Diſciple tout auſſi zelé que lui pour ſon Maître. Ainſcom cependant étoit un homme d'honneur, incapable de paſſer les bornes d'une légitime défenſe, & qui ne pouſſa la recrimination tout au plus qu'à une petite ironie fine & ingenuë.

Il ne s'inſcrivit en faux contre aucun des éloges abſolus qu'on donnoit à Deſcartes. Mais il dit librement ce qu'il penſoit de la méthode Carteſienne d'Algebre & de Calcul. Il avoit accordé à Deſcartes le titre d'Algebriſte habile, *Algebriſta egregius.* Deſcartes, ni Lipſtorp n'en avoient tant dit en faveur de Gregoire : Ainſcom ne retracta point cet éloge, mais il s'en tint là, & en continuant de regarder ſon adverſaire comme loüable d'avoir perfectionné ou inventé l'Algebre, il regarda cette Algebre comme une petite reſſource pour aller plus loin dans la Géometrie. C'étoit le préjugé du tems : nous avons vû que c'étoit auſſi celui de M. Nevv-

ton ; & nous avons dit nos raiſons en faveur de ce prejugé qui eſt auſſi le nôtre.

Ainſcom applaudit donc à la ſageſſe que Lipſtorp attribuoit à Deſcartes, de n'avoir jamais tenté l'affaire des quadratures : » Non, *dit-il*, qu'elles ſoient » impoſſibles ou impénetrables à l'eſprit humain, » mais parce que connoiſſant bien les bornes & » les limites de ſon Algebre, *ſed quia Algebræ ſuæ* » *terminos ac limites probe noſcens*, il la jugeoit peu » capable de ſe méſurer avec un problême ſi élevé, » *illam tam ſublimis problematis ſolutioni imparem videret* ; » & qu'apparemment il avoit déſeſperé d'en venir » à bout par la Géometrie ordinaire, *communi autem* » *Geometriâ idem perficere ſe poſſe deſperaret*.

Ainſcom ajoûte avec raiſon qu'il eſt ſurpris que Deſcartes ayant découvert cette prétenduë ſource d'erreurs dans l'ouvrage géometrique en queſtion, ne l'ait pas publiée ou fait connoître au moins à quelqu'un, & à Lipſtorp même qui auroit pû s'en faire honneur, ſuppoſé que Deſcartes jugeât cet honneur trop au deſſous de ſa gloire. Pour le moins, falloit-il charitablement détromper le public, auprès de qui l'autorité de Deſcartes, qui eſt comme ſur-humaine pour ſes partiſans, auroit été d'un grand poids pour le détromper d'un Ouvrage qui, ſelon l'expreſſion de Meibom, tenoit enchaîné tout l'Univers, *cum ab autoritate Carteſii, quæ apud illos penè ſuprà humanam eſt, non leve momentum res ea habitura eſſet*.

Cependant Ainſcom, fier qu'on n'attaquât un Ouvrage géometrique que par voye d'autorité, &

par des raiſons & des convenances philoſophiques, triomphoit & ſe confirmoit de plus en plus dans la bonne opinion qu'il avoit de ſon Maître & de ſes quadratures, dont il paroît plus perſuadé que ſon Maître même. *Philoſophicas rationes*, dit-il, *& neſcio quas congruentias afferre, dum de re Geometricâ pronuntiandum, ineptum planè & abſurdum eſt.*

On peut pourtant un peu excuſer Deſcartes, qui du reſte avoit eu la ſage diſcretion de ne rien hazarder là-deſſus dans le public. L'évenement entraîne les ſages, & les plus grands Philoſophes ont peine à ſe défendre de toutes ſortes de préjugés populaires. L'eſprit de l'homme eſt ainſi fait que tout ce qui eſt un peu difficile il le traite d'impoſſible, & que tout ce que bien des gens ont ſouvent tenté ſans aucun ſuccès, lui paroît une choſe à l'épreuve de toutes les tentatives. La quadrature du cercle eſt certainement juſqu'ici au-deſſus de tous les efforts qu'on a faits pour y parvenir.

Peut-être n'y a-t-il point eû de grand Géometre depuis Euclide juſqu'à Archimede, & depuis Archimede juſqu'à Gregoire de S. Vincent incluſivement, qui n'ayent travaillé toute leur vie pour la trouver. Depuis ce tems-là on y a peut-être un peu moins travaillé en général; on aſſure pourtant que M. Nevvton s'y eſt exercé toute ſa vie; & du reſte les quadratures en géneral, & la quadrature du cercle en particulier, ont été le grand objet de la nouvelle Géometrie. Il paroît cependant qu'elles ne ſont pas l'objet propre du calcul, & qu'au moins l'Analyſe Carteſienne n'alloit point-là. De ſoi l'Analyſe eſt

bornée à ce qu'on appelle des Problêmes, *Problêmes lineaires*, en prenant cette expreſſion dans un ſens un peu étendu. Deſcartes ne pouvoit pas tout faire, & c'étoit beaucoup que de corriger le mauvais goût de ſon tems. La Géometrie y étoit dégenerée en un petit calcul Algebrique & en petits problêmes qui n'avoient pour objet que les proprietés abſtraites des nombres. Deſcartes ramena le calcul à la Géometrie, & aux problêmes géometriques, à determiner des points, à trouver des lignes, à ce qu'on appelle les lieux géometriques & la conſtruction des équations. Ces problêmes par leur ſubtilité valent bien peut-être toute autre ſorte de Géometrie ; mais ce ne ſont que des problêmes, des moyens & non un but, des moyens même inutiles & frivoles, & qui ceſſent d'être des moyens dès qu'on s'y arrête comme à un but : ce ſont des pratiques ſpeculatives & idéales, plus difficiles même que les plus ſubtiles théories.

Enfin la Géometrie Carteſienne ne paſſa jamais cette borne, & peut-être même ne l'aurions-nous point encore paſſée, vû l'aſcendant que prit d'abord la méthode Carteſienne : mais Gregoire de S. Vincent avoit par trop de découvertes & de nouvelles vûës ouvert la veritable carriere, & montré le vrai but & la vraie Géometrie, qui conſiſte à méſurer les corps, les ſurfaces & les lignes, & par conſéquent à trouver des quadratures : Car ſous ce nom géneral de quadratures on entend la méſure de ces trois ſortes d'étenduës.

Deſcartes donc nourri au calcul, à l'algebre, aux

problêmes, & voyant que tous les efforts qu'on avoit faits pour la quadrature du cercle avoient échoüé, ne doutoit pas apparemment qu'elle ne fût impossible, & s'applaudissoit comme d'un trait de prudence & de sagesse, de s'être jetté dans un genre de Géometrie qui l'éloignoit peut-être plus qu'il ne pensoit du vrai but.

Cependant le Livre de Gregoire de S. Vincent parut & excita en naissant de grands mouvemens dans les esprits. Le premier jugement de Descartes fut sans doute celui que Lipstorp rapporte, que l'Auteur avoit manqué le but comme les autres; & comme l'Ouvrage étoit vaste, il crut que sur quelque faux principe Gregoire avoit entassé bien des erreurs: non-seulement Descartes, mais tout Géometre un peu au fait, sans être même persuadé de l'impossibilité, & sur la seule connoissance de l'extrême difficulté du projet, porte le même jugement de tout nouvel Ouvrage qu'on lui présente sous le titre de la Quadrature du Cercle.

Etoit-ce la peine de lire un Ouvrage bâti sur un faux principe, aboutissant à un Paralogisme, & tout semé par conséquent de grossieres erreurs? Descartes vrai-semblablement jetta les yeux sur l'ouvrage géometrique, le parcourut des yeux, mais ne le lut pas. Les trois jours qu'on dit qu'il s'y arrêta, ne sont apparemment que pour la forme & pour une certaine bienséance. Avoir lû un ouvrage si vaste & si plein en trois jours, n'étoit pour Descartes même que l'avoir effleuré des yeux.

Comme même le principe d'erreur en question

n'eſt qu'en idée, que le courant de l'ouvrage eſt fort ſain, & que s'il y a des erreurs elles ſont en petit nombre & uniquement dans la concluſion, & dans le morceau final des quadratures, c'eſt-à-dire, dans les trente ou quarante dernieres pages de tout l'ouvrage, il eſt clair que pour trouver ces erreurs, il auroit falu parcourir un enchaînement de près de deux mille Propoſitions, nouvelles & profondes, heriſſées même & difficiles : choſe tout-à-fait impoſſible en trois jours, ou même en trois mois, alors ſur tout que rien de tout cela n'avoit été remanié ni éclairci : Car aujourd'hui quelqu'un qui ſçait un peu les nouveaux calculs, ſçait preſque tout ſon Gregoire d'avance, & peut le lire facilement en peu de mois.

Le lire! ou le parcourir des yeux pour y reconnoître les choſes qu'il ſait déja! Car il y a raiſon de douter, qu'un eſprit accoutumé au calcul fût capable non-ſeulement de la patience, mais même de l'attention & d'une certaine pointe de pénétration, que demande une ſuite de raiſonnemens diſtincts, articulés & bien énoncés par de vrayes ſyllabes, de vrais mots, un vrai diſcours. Et ſur ce pied Deſcartes lui-même auroit eu peine à ſe captiver à lire un ouvrage de pure Géometrie de l'étenduë de celuici. Et on peut croire que la perſuaſion où il fut d'abord de la quadrature manquée, augmenta en lui la repugnance qu'il avoit à cette lecture, & qu'à ſon tour cette repugnance confirma tout-à fait cette perſuaſion : & qu'ainſi Deſcartes n'avoit jamais lû ce Livre ni en trois jours ni en mille, lû au moins pour

en juger d'une maniere digne de lui, & de cette façon décisive que lui prête Lipstorp.

L'Ouvrage avoit pourtant des Partisans & des Admirateurs, & Descartes avoit les siens aussi, & étoit un Maître en Israël. Descartes étoit même homme à entrevoir un nombre de découvertes & de sublimes vérités qui brilloient dans cet Ouvrage. Voilà les principes sur lesquels il se gouverna dans tout ce que le commerce du monde l'engagea de faire ou de dire en public ou en particulier sur cet Ouvrage. En public & dans les discours qui pouvoient revenir à l'Auteur ou à ses Disciples, comme la Lettre de Stockolm que nous avons rapportée, Descartes parla obligeamment de l'Auteur, & rechercha son amitié, se contentant d'insinuer son sentiment sur le point particulier de la quadrature circulaire.

Mais en particulier, & devant ses Disciples affidés qui sans doute le pressoient de s'expliquer & n'avoient les yeux que sur lui, en attendant l'Oracle pour juger eux-mêmes d'un Ouvrage qui tenoit toute l'Europe sçavante enchaînée, en servitude ou en suspens. Descartes, obligé de parler clair & en Maître, crut sans doute pouvoir hazarder le jugement définitif, que Lipstorp eut l'imprudence de faire éclater.

Descartes ne fut pas le seul grand Géometre, qui se laissa imposer par le préjugé géneral de l'impossibilité de la quadrature ; quoiqu'il fût un des plus reservés à faire éclater son jugement ou son préjugé contre l'Auteur ; reserve qui fait sentir elle seule sa superiorité sur tous ces grands Géometres. M. Hu-

guens de l'Académie Royale de Paris, & le P. Leotaud Jésuite, inférieurs en ce point à Descartes, mais supérieurs aux AA*** & aux autres critiques, passant à l'Auteur tous ses préliminaires, toutes ses vrayes découvertes, c'est-à-dire, tout son premier volume & plus des trois quarts & demi du second, renfermerent sagement leur critique ou leur examen dans le morceau final des quadratures. Huguens fit un Livre exprès pour en decouvrir le faux: Ce Livre porte le nom Grec de ἐξέτασις ou *exetasis*, critique ou discussion.

Cette critique, non plus que celle de Leotaud ne demeura point sans réponse. Ainscom fidéle à son Maître le défendit *tela omnia contra*, & ce qu'il y a de surprenant le défendit bien, & personne ne put alors se vanter d'avoir découvert le faux ou le foible des quadratures de S. Vincent. La plûpart n'y trouverent d'erreurs que celles qu'ils substituerent eux-mêmes à celles qu'ils y imaginoient & qu'ils vouloient absolument y trouver: Or ce qu'on ne put faire alors, personne ne l'a tenté depuis, & les vrayes beautés de l'Ouvrage gagnant d'un autre côté la Géometrie, & l'habitude de lire les Livres de pure Géometrie se perdant à force de calcul, le gros du public Géometre perdit de vûë Gregoire & l'erreur même de ses quadratures; ceux qui auroient pû en découvrir le défaut ayant interêt à faire oublier jusqu'au nom même de l'Auteur, c'est-à-dire, de la mine où ils puisoient de quoi embellir leur calcul.

J'ai dit le *foible* & le *défaut* des quadratures de Gregoire:

Gregoire : Car Lipſtorp, AA***, Merſenne, Meibom, Alexis Sylvius, Huguens, Leotaud, Deſcartes, outrerent les choſes en voulant y découvrir des erreurs, & ſurtout des ſources d'erreurs. Ils n'y en découvrirent point, mais le comble du Paradoxe fut qu'ils ne pouvoient pas même y en découvrir, parce qu'il n'y en avoit point, ſi ce n'eſt un petit nombre de la part de l'Imprimeur, dont AA*** eut la gloire d'en découvrir une qui lui attira un ſincere remerciment de la part de l'Auteur.

C'eſt ici une eſpece de prodige ou de merveille de l'eſprit humain, qu'on ne prie perſonne d'admirer ni de croire avant que de l'avoir verifié de ſes propres yeux. Eſt-il croyable qu'un Auteur ait entrepris de trouver la quadrature du cercle, que pendant cinquante années il l'ait ſuivie de très-près, & comme de poſte en poſte, par toutes ſortes de routes nouvelles & de ſentiers eſcarpés, à travers trois, ou peut-être ſix mille propoſitions, & que tous les plus grands Géometres d'un ſiécle entier où la Géometrie a été extrêmément cultivée, ayent trouvé dans ce labyrinthe une multitude innombrable de vérités ſublimes & fécondes ſans pas une erreur, & que l'Auteur n'ait manqué que ſon dernier but ſans jamais s'égarer dans le chemin ; qu'il ait manqué ce but en le ſaiſiſſant, qu'il l'ait ſaiſi ſans le prendre, qu'il l'ait pris ſans le tenir ?

Il eſt tems d'éclaircir ce myſtere & de réſoudre ce problême qui n'eſt pourtant pas ſans exemple dans la Géometrie. Gregoire a donné la quadrature comme Euclide & Archimede l'avoient donnée, &

comme les plus grands Géometres de ce ſiecle l'ont donnée, non abſolument, mais hypothetiquement. Euclide ou Archimede ont démontré que le cercle eſt égal à un triangle qui a pour baſe ſa circonference, & pour hauteur ſon rayon, que la circonference eſt égale à la tangente de la ſpirale, que la ſphere eſt égale à un cone qui a ſa ſurface pour baſe, & pour hauteur ſon rayon, que la ſurface ſpherique eſt quatre fois le cercle générateur, que le cylindre eſt triple de la ſphere & du cone, &c. C'eſt ainſi que Torricelli a demontré, ou tout autre, que la Cycloïde eſt triple du cercle générateur; Gregoire, que la tangente de la parabole donne la rectification du cercle; M. Nevvton, qu'une infinité de courbes étoient quarrables, en ſuppoſant la quadrature du cercle ou de telle autre de ces courbes, &c.

Voilà tout le myſtere, & la maniere dont notre Auteur a quarré le cercle ſans le quarrer; comme qui meſureroit une choſe par une meſure immeſurable elle-même ou inconnuë enfin; Auteur plus admirable au reſte, après s'être ſi avant engagé dans un ſi tortueux dedale, d'avoir retrouvé pour en ſortir la porte par où il y étoit entré, que ſi le hazard l'avoit fait aboutir, comme il pouvoit arriver, à l'iſſuë par où il avoit prémédité de ſortir avec ſon butin; puiſqu'enfin il en eſt toujours ſorti, ſinon ſans gloire, du moins ſans aucun deshonneur & ſans payer aucun tribut à l'erreur, & en remportant même avec aſſez de gloire de bons lambeaux de cette riche toiſon.

Il vient de nous échaper que le hazard auroit bien

pû conduire l'Auteur à l'iſſuë de ſon projet, comme ſi nous penſions que la quadrature du cercle fût une choſe poſſible à trouver. Et pourquoi ne le penſerions-nous pas en effet ? Deſcartes l'a cruë ſans doute tout-à-fait impoſſible. Aujourd'hui cette idée paroît la plus repanduë parmi nos Géometres, & M. de Fontenelle qui eſt un des plus célebres a inſinué dans ſes élemens de la Géometrie de l'Infini, pp. 513, & 14, une eſpece de démonſtration de cette impoſſibilité.

Mais, outre que l'ingenieux Auteur eſt bien éloigné de donner ſa démonſtration pour géometrique, ou même abſolument pour une démonſtration reguliere d'aucune eſpece, & que toute cette théorie Métaphyſique découle du principe d'un infini numerique, dont on a démontré le faux, il n'y a pas d'incommenſurabilité qui empêche le rapport du diametre à la circonférence, ou du quarré au cercle, d'être un rapport fini & déterminé aſſignable de ſoi & déterminable par conſéquent.

Une preuve même ſans replique, que toutes ces eſpéces diverſes d'incommenſurabilités auſquelles on veut élever le cercle, ſont fauſſes, c'eſt que la quadrature d'un cercle infini, ou d'une portion infiniment petite d'un cercle fini, eſt poſſible, & même déja donnée (*Mathem. univerſ. pag. 651 :*) ce qui ſeul démontre que l'incommenſurabilité de la quadrature eſt de la premiere eſpece, & ſans doute de la ſeule réelle, de la ſeule au moins qui ſoit démontrée. Car cette incommenſurabilité eſt telle, que l'infini la fait diſparoître & reparoître tour à

tour; témoin la diagonale & le côté dont les quarrés ſont commenſurables, les cubes incommenſurables, &c.

Après cela l'incommenſurabilité n'empêche pas qu'on ne trouve tout auſſi facilement par la Géometrie les incommenſurables que les commenſurables, l'incommenſurabilité n'étant pas tant une difficulté géometrique qu'une impoſſibilité Arithmetique, qui vient de l'imperfection des nombres comparés avec l'étenduë, dont ils ne ſçauroient exprimer les richeſſes, n'étant faits que pour marquer ſes bornes, & ne pouvant jamais repréſenter ſa grandeur abſoluë qui eſt infinie.

S'il y avoit diverſes eſpeces d'incommenſurabilité plus élevées les unes que les autres, elles ſe ſerviroient les unes aux autres comme de contregardes ou d'avant-murs. On ne pourroit approcher de la ſeconde qu'après avoir atteint la premiere, & comme on ne pourroit qu'approcher de la premiere ſans jamais l'atteindre, toute approche de la ſeconde, & à plus forte raiſon de la troiſiéme & de la quatriéme, ſeroit abſolument interdite. La quadrature eſt donc de la premiere eſpece d'incommenſurables, puiſqu'on en approche d'auſſi près qu'on veut, d'auſſi près enfin que de la racine par exemple, de 3, de 5 de 6, &c. ſans jamais rencontrer de mur ou de foſſé qui barre le chemin, & qui en tienne éloigné d'aucune diſtance determinée. C'eſt peut-être ici une démonſtration contre les ingenieuſes conjectures du ſçavant Académicien.

Perſonne n'a donc démontré ni même gueres en-

trepris de démontrer l'impoſſibilité de la quadrature du cercle. Mais on a ſouvent entrepris de démontrer, & tous les plus célebres Géometres ont ſuppoſé la poſſibilité de cette quadrature. Mais nul ne l'a tenté avec plus de ſubtilité & de profondeur qu'un certain Auteur Allemand ou Flamand, Diſciple ou Contemporain de Gregoire de S. Vincent: ſon nom eſt *Della faille*. C'eſt dans une ſimple Theſe de Mathematique qu'il a fait voir que le centre de gravité d'un Arc, ou d'un Segment circulaire étant donné, le cercle ſeroit quarré.

C'eſt-là une quadrature hypothetique & une des belles découvertes particulieres du dernier ſiecle. Dira-t-on qu'un arc ou un ſegment de cercle n'ont point de centre de gravité ? Le contraire eſt demonſtratif. Il faut cependant donner aux choſes leur valeur, & convenir qu'il n'y a pas plus de démonſtration géometrique de la poſſibilité que de l'impoſſibilité de cette quadrature, & que ſeulement cette poſſibilité eſt démonſtrative, & l'impoſſibilité ſimplement préſumée, parce que le cercle comme toute autre courbe a une quadrature, c'eſt-à-dire, eſt égal à une figure quarrée ou rectiligne, & que ſa capacité eſt déterminée entre des limites qu'on aſſigne & qu'on raproche, ſinon infiniment, du moins à l'infini.

Quelques prétendus Géometres ont imaginé que le cercle échappe par ſa courbure, d'autres par ſon uniformité, par ſa perfection : comme ſi nous ne quarrions pas bien d'autres courbes, ou comme ſi la quadrature du cercle n'étoit pas inſéparablement

liée à celle de l'éllipſe, de l'hyperbole, & d'une infinité d'autres courbes non uniformes, non parfaites, bizarres même, & même rectilignes. Car le cercle eſt égal à un triangle qui a pour hauteur le rayon & pour baſe la circonférence ; & qu'on ne diſe pas que cette baſe eſt fictice & que la circonférence ne peut ſe redreſſer, puiſqu'elle eſt démontrée égale à la tangente naturellement droite de la ſpirale, ou de la parabole.

Sous la forme même circulaire & entre des lignes purement circulaires, ne quarre-t-on pas la lunule d'Hippocrate & ſes diverſes portions, ſelon toute raiſon donnée ? Gregoire de S. Vincent n'a-t-il pas reduit avec un art merveilleux des corps circulaires & non circulaires qu'il a cubés, & dont il a quarré les ſurfaces circulaires ? L'éllipſe cylindrique de *Laloubere* n'eſt-elle pas quarrée ?

A quoi tient-il donc qu'on ne quarre le cercle ? ſi nous ſçavions preciſément à quoi il tient, dès ce moment il ne tiendroit plus à rien. Nous ôterions l'obſtacle s'il étoit clairement reconnu, & dans le cas de l'impoſſibilité, nous ſçaurions qu'on ne peut l'ôter, & le problême ſeroit réſolu, même par ſon irréſolubilité démontrée. Mais ſi nous ignorons la difficulté préciſe, & le moyen précis approprié pour la ſurmonter, nous ſçavons en géneral la route qu'on peut prendre pour y arriver, & celle qu'on a priſe juſqu'ici pour arriver à d'autres quadratures, ſinon auſſi difficiles, qui avoient au moins leur degré de difficulté.

Car tout cela ne peut rouler que ſur la difference

du plus au moins de difficulté. Et comme notre unique but dans une si longue Préface, n'est & ne peut être que d'ouvrir les vrayes sources de l'invention géometrique, d'en montrer le vrai but, d'en indiquer les vrais moyens, il est tems que nous recüeillions de tout ce qui précede une méthode d'étudier & de cultiver la géometrie, qui nous méne au but ou à des choses au moins aussi importantes que le but particulier & précis de la quadrature du cercle.

On peut absolument se passer d'arriver à ce but, si on ne regarde que l'usage pratique de cette quadrature, puisqu'on en approche autant qu'il le faut & qu'on le peut dans cette pratique usuelle. Mais on ne doit pas, malgré cela, cesser d'envisager ce but, puisque la providence semble y avoir attaché les autres découvertes, & les avoir toutes semées sur le chemin qui y conduit, & qu'enfin en toutes sortes d'opérations spirituelles & méchaniques l'homme a besoin de se proposer un but élevé.

Car il est élevé, & nous ne devons pas en dissimuler la difficulté à ceux à qui nous le proposons, étant bien éloignés, en aiguillonnant les pusillanimes, de vouloir trop encourager les présomptueux. Ce sont les Géometres habiles qui sont ici les pusillanimes, parce qu'ils sentent en effet la difficulté : & il n'y a que les petits génies, les demi-Géometres qui entreprennent la quadrature avec trop de confiance, sans prendre presque aucun des moyens necessaires pour en surmonter la grande difficulté : de tels gens n'arrivent pas au but, & ne cueïllent mê-

me ſur le chemin aucune autre eſpece de découverte, mais un nombre d'erreurs pareilles à celles que Deſcartes ſoupçonnoit & que Roberval, Merſenne, Huguens vouloient trouver dans Gregoire de Saint Vincent.

Prennent-ils même le vrai chemin, ces chercheurs de pierre Philoſophale plûtôt que de quadrature? munis à peine d'un peu de Géometrie élementaire, ils errent au hazard, portant la préſomption & l'ignorance juſqu'à dire que le hazard pourra bien un jour enfanter cette grande découverte, & que ce ſera peut-être un médiocre Géometre de bons ſens qui fera le coup. Car, diſent-ils, les prétendus grands Géometres y font trop de façons & c'eſt du rafinement que toute cette Algebre, cette haute Analyſe, cet infini équivoque, ces ſections coniques, ces courbes, &c. Voilà en vérité de beaux titres pour entreprendre une découverte de cette force, que des peut-êtres & des hazards préparés par une médiocrité de genie & de ſcience avec une doſe de bon ſens, comme ſi le bon ſens alloit-là!

Mais c'eſt ce hazard qui merite un bon éclairciſſement, parce qu'il a paſſé comme en proverbe parmi même les Philoſophes & les Géometres habiles, & dans les Livres comme dans le diſcours, que c'eſt le hazard qui fait les découvertes, & que ce ſera peut-être un ignorant en Géometrie qui trouvera la quadrature en queſtion.

Nous ne voyons pas cependant qu'un Phyſicien faſſe des découvertes géometriques, ni qu'un Géometre purement Géometre en faſſe de Phyſiques, ni

ni un Horlogeur dans la Peinture, ni un Peintre dans la Mechanique, ni un Mechanicien dans la Chimie, ni un Chimiste dans la Theologie, ni un Theologien dans la Médecine : chacun en fait dans son metier & dans la sphere qu'il habite. Or chaque sphere générale a ses spheres particulieres & subalternes, ou ses divers degrés d'élevation; Jupiter a ses Satellites diversement éloignés de son centre, selon le dégré de leur pesanteur. La sphere terrestre même a ses couches & ses élemens. Si les animaux faisoient des découvertes, nul hazard n'en feroit faire aux Poissons dans l'air, ni aux Oiseaux dans l'eau.

De même celui qui ne sçait que les élemens d'Euclide & qui ne connoît que la ligne droite & le cercle, n'ajoûtera jamais aux proprietés des sections coniques, l'Arithmeticien ne perfectionnera jamais l'Algebre, le simple Algebriste n'enrichira point d'une nouvelle formule le calcul infinitesimal, l'Astronome ne trouvera point le passage de l'Europe à la Chine par les mers du Nord, ni le Géographe la conciliation de l'immobilité de la terre avec son transport autour du Soleil. Et par une suite naturelle un petit esprit ne fera point de découvertes de l'ordre le plus élevé, ni un demi Géometre de celles qui demandent une profonde connoissance de la Géometrie, ni un paresseux de celles qui sont le fruit d'un grand raisonnement, d'une longue méditation, d'un travail épineux, pas plus qu'un homme qui sera à la Chine fera la découverte des mines du Potosi.

Chaque but a son chemin, chaque fin a son

moyen, chaque ouvrage a ſon travail, chaque problême a ſon degré de difficulté qui demande un degré de genie & de capacité. Un Géometre monté par ſon eſprit & par ſa ſcience, c'eſt-à-dire, par ſes connoiſſances naturelles & acquiſes au niveau de la quadrature du cercle, peut bien ne pas la trouver, s'il ne la cherche pas, ou s'il ſe jette, même en la cherchant, dans des ſentiers qui l'en écartent malgré lui & comme ſous-main, ſans qu'il s'en apperçoive. Il peut auſſi fort bien la trouver comme par hazard & ſans la chercher d'une maniere expreſſe & ſans y penſer.

Mais ce n'eſt jamais qu'un demi hazard, puiſque la cauſe préciſe & unique pourquoi il la trouve, eſt parce qu'il a du genie, parce qu'il a de la ſcience, parce qu'il s'applique, parce qu'il connoît ſon objet, qu'il s'y affectionne, qu'il le manie, qu'il le tourne & le retourne, qu'il l'enviſage de tous les côtés, de tous les ſens, parce qu'il penſe jour & nuit à des choſes qui y ſont liées, qui y ont des rapports prochains, qui de ſoi y aboutiſſent. Celui qui découvrit les mines du Perou, étoit au Perou, dans l'endroit même où étoit la mine, & parce qu'il arracha un arbuſte qui tenoit à la mine; il n'y eut à cela d'autre hazard qu'en ce qu'il n'y penſoit pas; c'eſt-à-dire, en ce qu'il ne connoiſſoit pas la mine avant que de la connoître.

Pour trouver donc la quadrature du cercle, ou enfin quelque choſe d'équivalent, il faut ſe mettre à portée d'y atteindre, laiſſant à faire au hazard le moins qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, uniquement la derniere démarche, qui conſiſte à ne la recon-

noître qu'au moment qu'elle se présente ; mais à se mettre en état de la reconnoître alors, & de ne pas la manquer. Car celui à qui la mine se découvrit après qu'il eût arraché l'arbuste, n'en auroit pourtant jamais fait la découverte s'il n'avoit eu des yeux pour la voir, & un esprit même pour la discerner, s'il n'eut connu l'Or, s'il n'avoit même eu quelque connoissance de l'Or en mine.

Il s'agit donc de savoir le degré précis, ou géneral au moins, de genie & sur-tout de capacité, requis pour être à portée de cette découverte ou de toute autre découverte géometrique de pareille espece. Et pour cela il faut sçavoir à peu-près le degré de difficulté du Problême. Par exemple, la quadrature de la Lunule d'Hippocrate est évidemment du premier degré, puisqu'on l'a découverte dès le commencement & dans un tems où la Géometrie ne fournissoit que des secours de l'ordre le plus bas & une grande modicité de vûës Géometriques, c'est-à-dire, la simple Géometrie d'Euclide, le triangle & le cercle, la regle & le compas.

Au lieu que la quadrature de la Parabole, quarrée d'abord par le secours extraordinaire de la méchanique, & ensuite d'une maniere plus géometrique par Gregoire de S. Vincent, mais par un ordre de Géometrie plus élevé & par les sections coniques, cette quadrature étoit du second ordre de difficulté *au moins :* Car le génie extrêmement élevé d'Archimede & de Gregoire même, peut avoir abaissé tout d'un coup au second degré, ce qui pour les bons esprits ordinaires auroit été peut-être du trois ou qua-

triéme. Cependant il paroît qu'il n'y faloit que la connoiſſance un peu profonde des ſections coniques, ſuivant la nature du problême, comme il ne faloit à la lunule que le cercle & le triangle.

La triſection de l'angle & la duplication du cube appartiennent évidemment au troiſiéme ordre de difficultés, parce qu'il y faut non-ſeulement la connoiſſance ſimple des ſections coniques, mais leur comparaiſon & leur complication auſſi. L'ancienne Géometrie d'Euclide & d'Apollonius cherchoit en vain la réſolution de ces problêmes: ils n'étoient pas mûrs même pour le grand Archimede à moins que ſon genie ne ſuppléât aux moyens géometriques du troiſiéme ordre, par quelque moyen extraordinaire pareil à celui qui lui avoit donné la quadrature de la parabole.

Mais admirons la témerité des chercheurs de problêmes de profeſſion, qui, ſans pouvoir ſe flater du genie d'Archimede, & ſans aucune connoiſſance des ſections coniques, ni d'Apollonius, ni de Gregoire, cherchent pourtant toujours la triſection & la duplication par la Géometrie d'Euclide, par la regle & le compas, quoiqu'il ſoit décidé que les problêmes ſont du troiſiéme ordre au moins, & qu'ils ſoient même reſolus autant qu'ils peuvent l'être.

On ne peut pas prétendre à définir les ordres conſecutifs avec préciſion; mais en regardant Euclide comme un premier ordre de Géometrie & de moyens géometriques, Apollonius comme le ſecond, Archimede comme le troiſiéme, & Gregoire de S. Vincent comme le quatriéme, & leur aſſo-

ciant, si l'on veut, leurs ordres collateraux de calcul qui sont comme des moyens de moyens, associant Diophante à Euclide, Viete à Apollonius, Descartes à Archimede, Nevvton, Leibnis & tous les nouveaux Analystes à Gregoire, & remarquant enfin que la quadrature n'est au niveau d'aucune de ces quatre Géometries, & qu'elle s'éleve au-dessus de ces quatre ordres, on peut tirer ces conclusions.

1°. Qu'elle est au moins du cinquiéme ordre de difficulté. 2°. Que pour y atteindre, il faut, se mettre au niveau de ces quatre ordres de géometrie, les sçavoir & en être bien possesseur : Et *peut-être* même, 3°. s'élever au-dessus de ce quatriéme ordre à peu-près comme Gregoire s'est élevé au-dessus d'Archimede par l'invention de plusieurs moyens géometriques nouveaux, & par une amplification de la Géometrie ou de la matiere géometrique.

On dit *peut-être*, & c'est pour la consolation de ceux qui cherchent la quadrature, ou qui veulent se signaler par des découvertes d'un ordre un peu élevé, & qui ne soient pas de simples corollaires de celles qui ont précedé. Car on peut douter si le calcul auquel on a assujetti toute la géometrie moderne, n'a pas épuisé d'un côté le génie de ses inventeurs, des Descartes, des Leibnis, des Nevvtons, &c. & si d'un autre côté il n'a pas émoussé un peu les esprits subalternes; & si enfin tous ces grands hommes recueïllant les découvertes des quatre ordres de pure Géometrie qui avoient précedé, en prenant sur tout l'esprit, & en suivant le même fil d'invention, n'auroient pas atteint déja tout-à-fait le but, dont il

y a grand lieu de croire que Gregoire de S. Vincent n'étoit pas éloigné.

C'eſt dommage que la vaſte étenduë de cet Auteur, l'ait mis comme hors de portée, pour la plûpart de ceux qui ont cultivé depuis ce tems-là la géometrie, & que ceux qui ont pû le lire, ayent été trop ſenſibles au détail de ſes découvertes, & à la gloire qui pouvoit leur revenir du talent qu'ils avoient de les remanier par le cacul. Moyennant cela preſque perſonne n'a pû ou voulu ſe donner la peine d'embraſſer le corps entier de l'Ouvrage : perſonne n'en a pris le plan géneral, le ſyſtême, l'eſprit.

C'eſt cet eſprit, le même que celui d'Archimede, d'Apollonius, d'Euclide, de toute la ſaine antiquité, qui pouvoit ſeul, & qui pourroit ſeul encore aujourd'hui r'animer l'eſpoir de la quadrature, en reveiller les étincelles, en revivifier les ſemences. Car on a beau dire qu'en chemin faiſant, Gregoire a ſemé mille théories qui ne ſe rapportent point à cette quadrature : Il n'y a pas une propoſition dans tout cet immenſe ouvrage qui n'aille très-directement à ce but, qu'il s'étoit propoſé dès le commencement, & qu'il n'a pas perdu un ſeul inſtant de vûë.

La géometrie a-t-elle d'autre but après tout ? Tout Auteur ſyſtematique qui cultivera cette ſcience de tête & avec connoiſſance de cauſe, ſans trop maſquer ſon objet de calcul, aboutira toujours là, ou tournera neceſſairement tout autour. Le calcul tourne, mais ne fait que tourner comme par un cercle

dont elle eſt le centre. La méthode ancienne qui eſt celle du genie & du raiſonnement clair & articulé, tourne peut-être, mais en approchant, comme par une ſpirale, dont il faut eſperer que les retours ne ſeront pas infinis en nombre ni en étenduë.

Un préjugé avantageux, que ces approches ont un centre auquel on arrivera enfin & peut-être bientôt, ſi on ſuit la vraye route; c'eſt que le mouvement qui porte à ce centre, eſt un mouvement veritablement centripete & acceleré. Apollonius encherit beaucoup ſur Euclide, Archimede à proportion autant ſur Apollonius, & Gregoire pour le moins autant ſur Archimede. Un cinquiéme encheriſſeur de cette force pourra bien atteindre au but.

Mais il en doit couter à ce cinquiéme, s'il faut qu'il ente ſon génie ſur celui de ces quatre Auteurs, ſur tout s'il eſt ſi difficile d'embraſſer le vaſte ouvrage de Gregoire de S. Vincent. Il en doit couter ſans doute pour faire mieux que n'ont fait de ſi grands hommes: mais on pourroit ſe contenter de la réponſe, qu'une grande entrepriſe demande un grand courage, une grande hardieſſe, un grand travail. On ne veut cependant décourager perſonne. S'il faloit lire Gregoire d'un bout à l'autre, on pourroit y trouver de la difficulté, non qu'abſolument le ſtile de cet Auteur ſoit difficile, ni ſes propoſitions longues & embaraſſées; mais parce que le total de l'Ouvrage eſt long, & que ce ſtile ancien purement géometrique & de pur raiſonnement, de pure idée demande à la longue une forte attention dont tout

le monde n'eſt pas capable, à moins qu'on ne voulût ſe ſurmonter d'abord un peu pour en prendre l'habitude ; ce qui feroit bien le mieux.

Le ſtile du calcul qui couvre le raiſonnement & enveloppe les idées eſt plus aſſorti, avons-nous dit, au commun des eſprits : actuellement même la plûpart en ont l'habitude, & quand on a cette habitude, il n'eſt pas aiſé de ſe façonner à l'ancien ſtile. Heureuſement Gregoire de S. Vincent, Archimede & les autres de ce ſtile ont été mis & remis mille fois en calcul. On peut donc les étudier d'abord par là ſi on ne ſe ſent pas la force de les étudier en eux-mêmes : mais à condition qu'on les étudie enſuite bien en eux-mêmes, ſi l'on veut en prendre l'eſprit, & l'eſprit d'invention qui eſt un eſprit d'idée, de reflexion, de méditation, de raiſonnement, eſprit tout-à-fait entravé, émouſſé, éteint dans le calcul.

Voici donc l'ordre d'étude que l'on conſeilleroit à quelqu'un qui auroit le courage & le goût de ſe rendre ſolidement Géometre. Ce ſeroit en géneral de commencer par le calcul, & de finir par la pure Géometrie en les entremêlant peu à peu pour n'être pas trop eſclave du premier, & ſe familiariſer inſenſiblement à la derniere.

Par exemple on étudieroit Euclide par le calcul dans Lamy, Malezieu, &c. On le parcourroit enſuite ſans calcul dans Tacquet, Dechales, &c. On ſe rendroit après cela un peu profond dans l'Arithmetique, l'Algebre, l'Analyſe & dans toutes les grandes parties du calcul, qu'il auroit ſuffi d'ébaucher

cher un peu pour l'intelligence d'Euclide.

De-là on passeroit aux Sections coniques de M. de l'Hôpital, & ensuite à l'application de l'Algebre à la Géometrie par M. Guinée. On viendroit tout de suite à la Géometrie de Descartes, qu'on liroit d'abord dans l'excellent & très-solide Commentaire du P. Rabuel, imprimé depuis peu; & on parcoureroit ensuite deux ou trois fois le texte pur de Descartes. On se jetteroit au sortir de là dans l'Analyse démontrée du P. Reynaud de l'Oratoire, c'est aussi un bon Livre & un Auteur de l'Académie.

On fait cependant reflexion, que voilà bien du calcul, & qu'on pourroit s'y trop roidir l'esprit, & que peut-être seroit-il mieux après les Sections coniques de M. de l'Hôpital de se jetter un peu dans Apollonius, soit en Original, soit en Commentaire géometrique, dans Archimede, ou même tout d'un coup dans l'ouvrage géometrique de Gregoire, entremêlant la Géometrie avec le calcul, & faisant desormais marcher de pair, & comme en front de bandiere ces deux especes de troupes legionaires & auxiliaires, infanterie & cavalerie, armes pesantes & armes legeres; la Géometrie au centre, & comme au corps de bataille, & le calcul comme sur les aîles, ou à l'avant & à l'arriere-garde, pour ouvrir les chemins, pour ébaucher les idées, les détailler ensuite, en épuiser les corollaires, & en quelque sorte faire des prises & achever la victoire.

La lecture, par exemple, de Rabuel, de Descartes, de Reynaud marcheroit en même-tems, que les Livres du Cercle, de l'Ellipse, de la Parabole,

de l'Hyperbole, de Gregoire de S. Vincent, qui auroit déja été préparé par la lecture de M. de l'Hôpital, & qui trouveroit son Commentaire perpetuel dans ces trois ou quatre Auteurs.

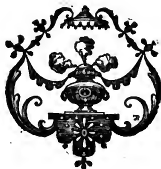
L'Analyse de l'Infini est assez à fond dans le second volume du P. Reynaud. Peut-être après y en avoir pris une legere connoissance, ou même laissant-là ce volume qui a d'excellentes choses, mais qui a bien des embarras, sur tout dans son Traité des Sections Coniques: vaudroit-il mieux se jetter dans l'Arithmetique des Infinis du célebre M. Wallis, dans le Traité des Series de M. Bernoulli, dans l'Analyse des Infiniment Petits de M. de l'Hôpital, dans les divers morceaux de calcul de M. Nevvton, & enfin dans la seconde Partie des Infiniment Petits de notre M. Stone; entremêlant cette lecture de celle du *Ductus plani in planum* de Gregoire, & de tout son second volume, qu'on lira assez courament lorsqu'on sera un peu plein de tous ces Auteurs de Calcul, sur-tout des Sections coniques de M. de l'Hôpital & de l'Arithmetique des Infinis de Wallis, & si l'on veut du Traité des Series de M. Bernoulli : on pourroit y ajouter aussi les Sections Coniques de Wallis.

Car on remarquera que de tous les Auteurs, dont la lecture peut le plus servir pour l'intelligence de l'ouvrage géometrique de Gregoire de S. Vincent, M. Wallis est celui qui mérite le plus d'être lû. Son Arithmetique des Infinis, est comme le précis Analytique de tout cet ouvrage géometrique. Car tandis que Roberval, Mersenne, Huguens, Leotaud s'a-

muſoient à éplucher cet ouvrage, & à y trouver des erreurs, Wallis plus clair-voyant & plus laborieux, s'occupoit ſolidement à le defricher, & à en compoſer ſon Arithmetique, qui eſt un excellent Livre, & un des meilleurs que nous ayons ſur cette matiere : l'Auteur ayant bien plus viſé à y mettre toutes ces ſublimités géometriques à la portée de tout le monde par un ſtile Arithmetique, & un peu afoibli par une induction tirée de la méthode des indiviſibles de Cavallieri, qu'à ſe rendre admirable par trop de force géometrique d'exhauſtion ancienne, ou par une Algebre & une Analyſe moderne.

Un Ouvrage dont on ne penſoit point à parler ici, & dont quelques perſonnes veulent qu'on faſſe mention, c'eſt celui de la *Mathematique Univerſelle, abregée à l'uſage & à la portée de, &c.* l'Ouvrage eſt aſſez connu. Mais peut-être ſera-t-il bon d'avertir ceux,qui ſeront bien-aiſes d'épargner la multitude des Livres, la longueur du chemin, & la difficulté du travail ; que cet Ouvrage renferme tout ce qui eſt neceſſaire pour lire Gregoire, Archimede, Apollonius & Euclide, dont il contient un précis aſſez étendu : qu'il a même été fait dans l'eſprit d'introduire dans la lecture de ces Auteurs anciens, en ſuppléant à celle de la plûpart des modernes, qui n'ont gueres fait de corps complet de géometrie, & qui ſont du reſte extrêmement embarraſſés de calcul, de conſtructions, de problêmes, de choſes en un mot non démontrées, non démonſtratives, & fort peu méthodiques.

Quoiqu'il en ſoit, quand on a une fois lû Wallis, de l'Hôpital, Stone, & ſi l'on veut Rabuel, ou mieux encore, la Mathematique Univerſelle, on ne trouve preſque plus rien de nouveau, ni par conſéquent de difficile dans tout l'Ouvrage de Gregoire de S. Vincent, ni même d'Apollonius & d'Archimede; & on peut en les liſant d'un eſprit libre & ſatisfait, s'attacher déſormais uniquement à en prendre comme on a dit, le corps, l'eſprit, le ſyſtême, le fil de l'invention, & ſe mettre tout-à-fait à leur place, pour porter plus loin l'Ouvrage de la Quadrature, ou en géneral l'édifice de la Géometrie, ſelon la deviſe du Géometre Flamand, *Plus ultrà.*



APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux, un manuscrit intitulé : *Suite de l'Analyse des Infiniment petits, de M. le Marquis de l'Hôpital.* Comme nous n'avons en François que très-peu d'Ouvrages sur le Calcul Integral, & qu'on trouvera dans celui-ci les premiers Elemens de ce calcul, expliqués avec beaucoup de clarté : j'ai crû que l'impression en seroit très-utile. Fait à Paris, ce 24 Mars 1733.

PITOT.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : à nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra; Salut. Notre bien amé PIERRE-FRANÇOIS GIFFART, Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il lui auroit été mis en main *une suite de l'Analyse des Infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital, Ouvrage suppléé par le sieur Stone, traduit de l'Anglois,* qu'il souhaiteroit faire imprimer & donnet au Public, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege, sur ce necessaires ; offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & en beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Exposant : Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Livre ci-dessus specifié, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, sur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attachée sous notredit contrescel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes ; Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Livre ci-dessus exposé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits sous

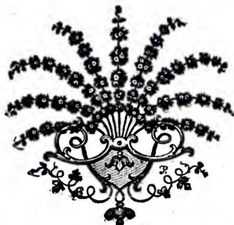
quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles, que l'impression de ce Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que l'Impetrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril 1725; & qu'avant que de l'exposer en vente, le Manuscrit ou imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur Chauvelin, le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayans-cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires: foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le deuxiéme jour de Mai l'an de grace mil sept cens trente-trois, & de notre Regne le dix-huitiéme. Par le Roi, en son Conseil. SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 540. fol. 536 conformément aux anciens Reglemens confirmez par celui du 28 Février 1723. A Paris le 20 Mai 1733.

G. MARTIN, *Syndic.*

TABLE
DES SECTIONS
Contenuës dans ce Traité.

Fin de la Table des Sections.



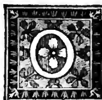
SUITE



SUITE
DE
L'ANALISE
DES
INFINIMENT PETITS:
COMPRENANT
LE CALCUL INTEGRAL.

SECTION PREMIERE.

La maniere de réduire les fractions & les quantités sourdes en series infinies.



N ne peut trouver les integrales exprimées par des fractions, ou par des quantités sourdes, qu'en faisant disparoître dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur signe radical, ce qui se fait par le moyen d'une serie infinie, comme on va l'expliquer dans les deux Problêmes suivans.

PROBLEME PREMIER.

Transformer $\frac{b}{a+x}$, *où* a *&* b *sont des quantités connuës & x inconnuë, en une serie infinie pour la dégager de son dénominateur binome.*

1. Il faut diviser b numerateur de la fraction par le denominateur $a+x$, ainsi qu'on en use dans les fractions decimales, en ajoûtant o, à ce qui reste & continuant cette operation jusqu'à ce que le quotient ait 4, 5 ou 6 termes. Alors vous en pourrez presque toujours trouver autant qu'il vous plaira en considerant la suite progressive de ce quotient, & ce nombre infini ou serie de termes que vous aurez trouvés sera le quotient de la division; mais ordinairement un petit nombre de premiers termes suffisent pour approcher aussi exactement qu'il est necessaire.

EXEMPLE PREMIER.

$$a+x)\ b+o\ (\frac{b}{a}-\frac{bx}{a^2}+\frac{bx^2}{a^3}-\frac{bx^3}{a^4}\ \&c.$$

$$b+\frac{bx}{a}$$

$$o-\frac{bx}{a}+o$$

$$-\frac{bx}{a}-\frac{bx^2}{a^2}$$

$$o+\frac{bx^2}{a^2}+o$$

$$+\frac{bx^2}{a^2}+\frac{bx^3}{a^3}$$

$$o-\frac{bx^3}{a^3}+o$$

$$-\frac{bx^3}{a^3}-\frac{bx^4}{a^4}$$

$$o+\frac{bx^4}{a^4}\ \&c.$$

Car divisant b par a le quotient est $\frac{b}{a}$, multipliant $\frac{b}{a}$ par $a+x$ le produit est $\frac{ba}{a}+\frac{bx}{a}=b+\frac{bx}{a}$ qu'il faut ôter du diviseur b, le reste est $o-\frac{bx}{a}$. qu'il faut diviser encore par a

le quotient sera $-\frac{bx}{a^3}$. Ainsi le produit de $a+x$ se changera en $-\frac{bx}{a^2}$ ou $-\frac{abx}{a^3}-\frac{bx^2}{a^3}$ ou $-\frac{bx}{a^2}-\frac{bx^2}{a^3}$ qui étant soustrait du dividende $-\frac{bx}{a^2}$ donnera $0+\frac{bx^2}{a^3}$ d'où on voit la suite de la division. Car le quotient consiste dans une suite infinie de termes dont les numerateurs ou puissances de x ont pour exposant un nombre moindre d'une unité que le nombre qui sert d'exposant à la quantité qui multiplie b : ce qui fait connoître que les puissances de a, ou leurs exposants suivent l'ordre des termes. Par exemple ; dans le troisiéme terme, l'exposant de la puissance de x dans le numerateur est 2, & celui de a au déterminateur est 3.

Si vous supposez la lettre x, la premiere dans le diviseur, alors divisant b par $x+a$, comme ci-devant, le quotient sera $\frac{b}{x}-\frac{ba}{x^2}+\frac{ba^2}{x^3}-\frac{ba^3}{x^4}$ &c. ensorte qu'on pourra former autant de series par la division, qu'il y a de termes dans le diviseur ; mais il faut placer les plus forts termes les premiers dans le diviseur & dans le dividende si vous voulez former une veritable serie.

Par exemple si $b=1$, $x=1$, & $a=2$ en suposant a pour la premiere lettre du diviseur, vous aurez $\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ &c. ce que nous connoissons être vrai selon les principes ci-dessus.

Mais si c'étoit x qui fût la premiere lettre du diviseur, alors $\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}=1-2+4-8+16$ &c. ce qui est faux ; car cette serie diverge & differe autant du vrai quotient que le nombre des termes en est plus grand ; par exemple le premier terme 1 excede $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$; deux termes sont surpassés de $\frac{4}{3}$; trois termes excedent de $\frac{9}{3}$ quatre termes sont surpassés de $\frac{15}{3}$, ainsi des autres.



EXEMPLE II.

$$b+x)\,aa+0\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$0-\frac{aax}{b}+0$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$

$$0+\frac{aax^2}{b^2}+0$$

$$+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3}$$

$$0-\frac{aax^3}{b^3}+0$$

$$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$$

$$0+\frac{aax^4}{b^4}\ \&c.$$

Si vous mettez x pour le premier terme, alors le quotient sera $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$ &c. De même le quotient de la fraction $\frac{1}{1+xx}$ donnera $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. ou si vous mettez xx, pour le premier terme du diviseur, vous aurez $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c.

De même si de la fraction $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$ vous ôtez par la division son dénominateur composé, vous aurez $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

Enfin cette fraction $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6-\frac{5}{128}a^4x^8\ \&c.}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8\ \&c.}$ dont le numerateur & le dénominateur sont des series infinies, peut être réduite en une seule serie, en divisant le numerateur par le dénominateur comme dans les fractions

décimales infinies : ce qui donnera pour quotient

$$
\begin{array}{lllll}
1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & + \frac{35}{128}b^4x^8 \ \&c. \\
+ \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab^2 & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 & \\
 & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 & \\
 & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{1}{32}a^3b & \\
 & & & - \frac{5}{128}a^4 &
\end{array}
$$

PROBLEME II.

Degager une expression complexe comme $\sqrt{aa+xx}$, de son signe radical & la réduire en une serie infinie.

2. EXTRAYEZ la racine comme vous en usez dans celles des fractions décimales en ajoûtant les chifres & en ôtant autant de termes qu'il est nécessaire pour trouver la suite de la progression ; en sorte que par les termes déja trouvés vous puissiez continuer de trouver les autres à volonté.

EXEMPLE I.

$$aa+xx\left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7},\ \&c.\right.$$

$$
\begin{array}{l}
aa \\
\hline
0 + xx \\
\quad xx + \frac{x^4}{4a^2} \\
\hline
\quad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
\quad - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
\quad\quad 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\quad\quad + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
\quad\quad\quad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}},\ \&c.
\end{array}
$$

Car tirant la racine de aa, il vient $+a$ pour le premier terme de la racine ; ensuite après l'avoir quarré, soustrayez-le de $aa+xx$ reste xx lequel étant divisé par $2a$, comme

dans l'extraction de la racine quarrée, le quotient sera $+\frac{x^2}{2a}$ pour le second terme de la racine, qui étant ajoûté à $2a$, & le tout multiplié par $\frac{x^2}{2a}$ donnera $xx+\frac{x^4}{4a^2}$ lequel soustrait d'xx, il restera $-\frac{x^4}{4a^2}$ qui étant divisé par $2a+\frac{x^2}{a}$ double des deux premiers termes, donnera pour le troisiéme terme du quotient $-\frac{x^4}{8a^3}$ qui étant ajoûté à $2a-\frac{x^2}{a}$ & le tout multiplié par $-\frac{x^4}{8a^3}$ produira $-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}$ lequel soustrait de $-\frac{x^4}{4a^2}$ le reste sera $0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$ & en continuant ainsi vous pouvez trouver autant de termes qu'il vous plaira.

Si xx est le premier terme de la serie, alors la racine sera $x+\frac{aa}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}+\frac{a^6}{16x^5}-\frac{5a^8}{128x^7}$, &c.

Ici, aussi-bien que dans la division précedente, le plus grand terme de la serie doit être le premier, autrement la racine ou serie seroit fausse.

EXEMPLE II.

$$x-xx\ (x^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\tfrac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\tfrac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}\ \&c.$$

$$\begin{array}{l}
x \\
\hline
0-x^2 \\
\quad -x^2+\tfrac{1}{4}x^3 \\
\hline
\qquad 0-\tfrac{1}{4}x^3 \\
\qquad -\tfrac{1}{4}x^3+\tfrac{1}{8}x^4+\tfrac{1}{64}x^5 \\
\hline
\qquad\quad 0-\tfrac{1}{8}x^4-\tfrac{1}{64}x^5 \\
\qquad\quad -\tfrac{1}{8}x^4+\tfrac{1}{16}x^5+\tfrac{1}{64}x^6+\tfrac{1}{256}x^7 \\
\hline
\qquad\qquad 0-\tfrac{5}{64}x^5-\tfrac{1}{64}x^6-\tfrac{1}{256}x^7 \\
\qquad\qquad -\tfrac{5}{64}x^5+\tfrac{5}{128}x^6+\tfrac{5}{512}x^7+\tfrac{5}{1024}x^8+\tfrac{5}{16384}x^9 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0-\tfrac{7}{128}x^6-\tfrac{7}{512}x^7-\tfrac{5}{1024}x^8-\tfrac{5}{16384}x^9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \&c.
\end{array}$$

EXEMPLE III.

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4 \&c. \quad (1-x+x^2 \&c.$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \hline 0-2x+3x^2-4x^3+5x^4 \&c. \\ -2x+x^2 \\ \hline 0+2x^2-4x^3+5x^4 \&c. \\ 2x^2-2x^3+x^4 \\ \hline 0-2x^3-4x^4 \&c. \end{array}$$

On peut de la même maniere extraire la racine cubique, quarrée quarrée &c. d'une quantité sourde, quand bien même elle seroit une serie infinie.

Mais on peut abreger ces extractions aussi-bien que les divisions précedentes, par le theoreme de M. le Chevalier Nevvton dont voici la formule $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{4n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \&c.$

Ou $P+PQ$ represente une quantité quelconque dont il faut chercher la racine ou toute autre dimension, qui se trouve transformée en une serie infinie. P, est le premier terme de la quantité: Q, est le reste des termes, divisé par le premier; & $\frac{m}{n}$ est l'exposant numerique de la puissance de $P+PQ$. Ordinairement A, B, C, D, &c. sont employés pour signifier les termes trouvés au quotient; *Par exemple*, A, pour le premier terme $P^{\frac{m}{n}}$; B pour le second $\frac{m}{n} AQ$, ainsi des autres.

Quelques exemples donneront l'usage de ce merveilleux theoreme.

EXEMPLE I.

$$\sqrt{aa+xx} \text{ ou } \overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}} \text{ est} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}, \&c.$$

Car dans ce cas $P = aa$, $Q = \frac{xx}{aa}$, $m=1$, $n=2$, A

$(=P^{\frac{m}{n}} = aa^{\frac{1}{2}}) = a.\ B(=\frac{m}{n}AQ) = \frac{xx}{2a}.\ C(=\frac{m-n}{2n}BQ) = -\frac{x^4}{8a^3}$, &c.

EXEMPLE II.

$\sqrt[5]{a^5 + a^4x - x^5}$ ou $\overline{a^5 + a^4x - x^5}^{\frac{1}{5}} = a + \frac{a^4x - x^5}{5a^4} - \frac{2a^8xx + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^9}$ + &c. dans ce cas $m=1$, $n=5$, $P=a^5$, & $Q=\frac{a^4x-x^5}{a^5}$.

EXEMPLE III.

$\frac{b}{\sqrt[2]{y^3 - a^2y}}$ ou $b \times \overline{y^3 - a^2y}^{-\frac{1}{2}} = b \times \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^4}{81y^7}$, &c. en ce cas $P=y^3$, $Q=-\frac{aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$, $A\ (P^{\frac{m}{n}} = y^3 \times -\frac{1}{3}) = y^{-1}, = \frac{1}{y}.\ B\ (\frac{m}{n}A\ Q = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times -\frac{aa}{yy}) = \frac{aa}{3y^3}$, &c.

EXEMPLE IV.

$\sqrt[3]{a+x^4}$ ou $\overline{a+x}^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} + \frac{4xa}{3}^{\frac{1}{3}} + \frac{2xx}{9a^{\frac{2}{3}}} - \frac{4x^3}{81a^{\frac{5}{3}}}$ + &c.

en ce cas $P=a$, $Q=\frac{x}{a}$, $m=4$, $n=3$, $A\ (=P^{\frac{m}{n}}) = a^{\frac{4}{3}}$, &c.

EXEMPLE V.

$\overline{a+x}^5$ ou $\overline{a+x}^{\frac{5}{1}} = a^5 + 5a^4x + 10a^3xx + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$. En ce cas $P=a$. $Q=\frac{x}{a}$. $m=5$, $n=1$.

$A\ (=P^{\frac{m}{n}}) = a^5\ B\ (=\frac{m}{n}AQ) = 5a^4x$. de même $C = 10a^3xx$. $D = 10aax^3$. $E=5ax^4$. $F=x^5$ & $G\ (=\frac{m-5n}{6n}FQ) = o$

EXEMPLE

EXEMPLE VI.

$\frac{1}{a+x}$ ou $\overline{a+x}^{\,-1}$ ou $\overline{a+x}^{\,-\frac{1}{1}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{aa} + \frac{xx}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$, &c. En ce cas $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, $m = -1$, $n = 1$, & A $(= P^{\frac{m}{n}} = a^{-\frac{1}{1}}) = a^{-1} = \frac{1}{a}$. B $(= \frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{a} \times \frac{x}{a}) = -\frac{x}{aa}$. Et $C = \frac{xx}{a^3}$. $D = -\frac{x^3}{a^4}$, &c. De sorte que par ce merveilleux theoreme on dégage les fractions de leurs dénominateurs, en même tems qu'on extrait leurs racines.

EXEMPLE VII.

$$\frac{3}{a+x} = 3 \times \overline{a+x}^{\,-3} = 3 \times \frac{1}{a^3} - \frac{3x}{a^4} + \frac{6xx}{a^5} - \frac{10x^3}{a^6}, \text{ \&c.}$$

EXEMPLE VIII.

$$\frac{b}{\sqrt[3]{a+x}} = b \times \overline{a+x}^{\,-\frac{1}{3}} = b \times \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} - \frac{x}{3a^{\frac{4}{3}}} + \frac{2xx}{9a^{\frac{7}{3}}} - \frac{14x^3}{81a^{\frac{10}{3}}}, \text{ \&c.}$$

EXEMPLE IX.

$$\frac{b}{\sqrt[5]{\overline{a+x}^3}} = b \times \overline{a+x}^{\,\frac{3}{5}} = b \times \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} - \frac{3x}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12xx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52x^3}{125a^{\frac{18}{5}}}, \text{ \&c.}$$

M. de Moivre nous a donné dans les *Transactions Philosophiques* * le theoreme suivant, soit pour élever une serie infinie à la puissance donnée m, soit pour en extraire la racine. Par exemple, $\overline{az+bz^2+cz^3+dz^4+ez^5+fz^6 \text{ \&c.}}^{\,m}$ est $=$

$$= a^m z^m +$$

$$+ \frac{m}{1} a^{m-1} b z^{m+1}$$

* n°. 230.

$$\left.\begin{aligned} &+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\,a^{m-2}b^2 \\ &\quad+\tfrac{m}{1}\,a^{m-1}c \end{aligned}\right\}z^{m+2}$$

$$\left.\begin{aligned} &+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\times\tfrac{m-2}{3}\,a^{m-3}b^3 \\ &+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{1}\,a^{m-2}bc \\ &\quad+\tfrac{m}{1}a^{m-1}d \end{aligned}\right\}z^{m+3}$$

$$\left.\begin{aligned} &+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\times\tfrac{m-2}{3}\times\tfrac{m-3}{4}\,a^{m-4}b^4 \\ &\quad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\times\tfrac{m-2}{1}\,a^{m-3}b^2c \\ &\qquad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{1}\,a^{m-2}bd \\ &\qquad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\,a^{m-2}c^2 \\ &\qquad\quad+\tfrac{m}{1}\,a^{m-1}e \end{aligned}\right\}z^{m+4}$$

$$\left.\begin{aligned} &+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\times\tfrac{m-2}{3}\times\tfrac{m-3}{4}\times\tfrac{m-4}{5}\,a^{m-5}b^5 \\ &\quad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\times\tfrac{m-2}{3}\times\tfrac{m-3}{1}\,a^{m-4}b^3c \\ &\qquad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{2}\times\tfrac{m-2}{1}\,a^{m-3}b^2d \\ &\qquad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{1}\times\tfrac{m-2}{2}\,a^{m-3}bc^2 \\ &\qquad\quad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{1}\,a^{m-2}be \\ &\qquad\quad+\tfrac{m}{1}\times\tfrac{m-1}{1}\,a^{m-2}cd \\ &\qquad\qquad+\tfrac{m}{1}\,a^{m-1}f \end{aligned}\right\}z^{m+5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}\times\frac{m-5}{6}\,a^{m-6}b^{6}\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{1}\,a^{m-5}b^{4}c\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{1}\,a^{m-4}b^{3}d\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\times\frac{m-3}{2}\,a^{m-4}b^{2}c^{2}\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}b^{2}e\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\times\frac{m-2}{1}\,a^{m-3}bcd\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-3}bf\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\,a^{m-3}c^{3}\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{1}\,a^{m-2}ce\\
&+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\,a^{m-2}d^{2}\\
&+\frac{m}{1}\,a^{m-1}g
\end{aligned}\right\}\ z^{m+6},\ \&c.$$

Il eſt abſolument neceſſaire, pour entendre ce theoreme, d'obſerver tous les termes qui multiplient la même puiſſance de z : pour cet effet on doit conſiderer dans chacun de ces termes deux choſes ; 1°, le produit des puiſſances quelconques des quantités ou coefficients donnés a, b, c, d, *&c.* 2°, le produit de $\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}$, *&c.* qui eſt mis devant les termes.

Maintenant pour trouver tous les produits qui appartiennent à la même puiſſance z ; par exemple, pour trouver le produit dont l'expoſant eſt $m+r$, (r étant un nombre entier quelconque) ces produits doivent être diſtingués en pluſieurs claſſes. Ces produits, après une certaine puiſſance a, par laquelle ils commencent, ſont ceux de la premiere claſſe ;

comme $a^{m-1}b^{3}c$ est un produit de la premiere classe, parce que b suit immédiatement a^{m-4}. Ceux qui ont c immédiatement après une puissance d'a sont les produits de la seconde classe ; ainsi $a^{m-3}cc$ d, est le produit de la seconde classe. Ceux qui donnent d, immédiatement après une certaine puissance d'a, sont les produits de la troisiéme classe ; ainsi du reste.

Ceci bien entendu ; 1°. Multipliez par b tous les produits qui appartiennent à z^{m+r-1}, qui précede immédiatement z^{m+r}, & divisez le tout par a. 2°. Multipliez par c, & divisez par a, tous les produits qui appartiennent à z^{m+r-2}, excepté ceux de la premiere classe. 3°. Multipliez par d, & divisez par a, tous les produits appartenans à z^{m+r-3}, excepté ceux de la premiere & de la seconde classe. 4°. Multipliez par e, & divisez par a, tous les termes appartenans à z^{m+r-4}, excepté ceux de la premiere, seconde & troisiéme classe, continuant ainsi jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux fois le même terme. Enfin ajoutez à tous ces termes le produit de a^{m-1} par la lettre dont l'exposant est $r+1$.

Nota. L'exposant d'une lettre est le nombre qui exprime la place qu'elle occupe dans l'alphabet, comme 3 est l'exposant de la lettre c.

Il est clair qu'on peut facilement trouver par cette méthode tous les produits appartenans à la seconde puissance de z, si vous mettez le produit appartenant à z^{m} comme a^{m}.

Maintenant pour trouver le produit (*a*) mis devant les termes, considerez la somme de toutes les unités qui sont contenuës dans l'exposant des lettres qui les composent dont il faut excepter l'exposant d'a ; pour lors écrivez autant de termes de la serie $m \times m - 1 \times m - 2$ &c. qu'il y a d'unités dans la somme des exposans ; cette serie sera le numerateur d'une fraction dont le dénominateur sera le produit de ces diverses series $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ *&c.* $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ *&c.* $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ *&c.* dont la premiere contient autant de termes qu'il y a d'unités dans l'exposant de b, la seconde autant qu'il y en a dans l'exposant de c, la troisiéme dans d, &c.

Vous pouvez en voir la démonstration dans les transactions ci-dessus citées. Un ou deux exemples donneront l'usage de ce theoreme.

(*a*) $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}$, *&c.*

EXEMPLE I.

Pour élever à la ſeconde puiſſance ou au quarré cette ſerie infinie $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$, &c.

En ſuppoſant dans ce theoreme $m = 2$, $z = x$, $a = \frac{1}{xx}$, $b = \frac{1}{x^4}$, $c = \frac{1}{x^6}$, $d = \frac{1}{x^8}$, &c. donc $\overline{\frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\ \&c.}^{\,2}$ ou $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5}$, &c. pour le premier terme $a^m z^m$ $(= \frac{1}{x^4} \times xx) = \frac{1}{xx}$. Le ſecond terme $\frac{m}{1}\ a^{m-1}\ b\, z^{m-1}$ $(= \frac{2}{xx} \times \frac{1}{x^4} \times x^3) = \frac{2}{x^3}$

$$\text{Le troiſiéme}\ \left.\begin{matrix} \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}\ a^{m-2} b^2 \\ + \frac{m}{1}\ a^{m-1} c \end{matrix}\right\} z^{m+2} \left\{ = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^8} \times x^4 \right.$$

$$= \frac{1}{x^4} + 2 \times \frac{1}{xx} \times \frac{1}{x^6} \times x^4 = \frac{2}{x^4} \Big\} = \frac{3}{x^4}$$

$$\text{Le quatriéme}\ \left.\begin{matrix} \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}\ a^{m-3} b^3 \\ \frac{m}{1} + \frac{m-1}{1}\ a^{m-2} bc \\ \frac{m}{1}\ a^{m-1} d \end{matrix}\right\} z^{m+3} = \Big\{$$

$$\left.\begin{matrix} 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{3} \times xx \times \frac{1}{x^{12}} \times x^5 = 0 \\ 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{x^6} \times x^5 = \frac{2}{x^5} \\ 2 \times \frac{1}{xx} \times \frac{1}{x^8} \times x^5 = \frac{2}{x^5} \end{matrix}\right\} = \frac{4}{x^5}$$

EXEMPLE II.

Pour quarrer cette ſerie infinie $1 - x + x^2 + x^3 +$ &c. ſu-

posant dans ce theoreme $m = 2$, $z = x$. $a = \frac{1}{x} - 1$, $b = 1$, $c = -1$, d$=1$, *&c.* ainsi $\overline{1 - x + x^2 - x + x^4.}^{\,2}$ *&c.* sera $= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$ *&c.* Car $a^m z^m$ $(= \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,2} \times x^2.)$ $= 1 - 2x + xx$. $\frac{m}{1} a^{m-1} b z^{m+1}$ $(= \frac{2}{1} \times \overline{\frac{1}{x}}^{\,1} \times -x^3) = 2xx - 2x^3$.

$$\left.\begin{matrix} \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 \\ \frac{m}{1} a^{m-1} c \end{matrix}\right\} z^{m+2} = \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,2-2} \times 1 \times x^4 \\ \frac{2}{1} \times \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,1} \times -1 \times x^4 \end{matrix}\right\} = -x^3 + 2x^4, \text{ \&c.}$$

EXEMPLE III.

Pour élever $1 - x + x^3 - x^5 + x^7$, *&c.* à la troisiéme puissance ou au cube.

Suposez $m = 3$. $z = x$. $a = \frac{1}{x} - 1$, $b = 0$, $c = 1$, d$= 0$. Alors la troisiéme puissance donnera $1 - 3x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^4$, *&c.* Car $a^m z^m$ $(= \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,3} \times x^3) = 1 - 3x + 3xx - x^3$.

$\frac{m}{1} a^{m-1} b z^{m+1}$ $(= 3 \times \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,3-1} \times 0 \times x^4) = 0$

$$\left.\begin{matrix} \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 \\ \frac{m}{1} a^{m-1} c \end{matrix}\right\} z^{m+2} = \left\{ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 3 \times 1 \times \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,1} \times 0^2 \times x^5 = 0 \\ 3 \times \overline{\frac{1}{x} - 1}^{\,2} \times 1 \times x^5 = 3x^3 - 6x^4 \times 3x^5 \end{matrix}\right\} =$$

$3x^3 - 6x^4 + 3x^5$

Et parce que b & $d = o$. Ainsi le second terme du theoreme general sera $= o$. On peut continuer ainsi, *&c.*

EXEMPLE IV.

Pour extraire la racine d'une serie infinie, où on supose $z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$, *&c.*

Pour trouver la valeur d'x en une serie composée d'un nombre infini de termes affectés de z, & delivrés d'x.

D'abord on supose $x = fz + hz^2 + Kz^3 + lz^4 + mz^5 + nz^6$ *&c.* maintenant par le theoreme $x^2 = f^2 z^2 + 2fhz^3$

$$+ h^2z^4 + 2hkz^5 + k^2z^6$$
$$+ 2fkz^4 + 2flz^5 + 2hlz^6$$
$$+ 2fmz^6$$
&c.

$$x^3 = f^3 z^3 + 3f^2 h z^4 + 3fh^2 z^5 + h^3 z^6, \text{ \&c.}$$
$$+ 3f^2 k z^5 + 3f^2 l z^6$$
$$+ 6fhkz^6$$
$$x^4 = f^4 z^4 + 4f^3 h z^5 + 6f^2 h^2 z^6, \text{ \&c.}$$
$$x^5 = f^5 z^5 + 5f^4 h z^6$$
$$x^6 = f^6 z^6, \text{ \&c.}$$

Maintenant substituant ces valeurs dans l'équation $o = - z + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$, *&c.* on trouve par-là $- z = - z$

$$+ ax = + afz + ahz^2 + akz^3 + alz^4 + amz^5 + anz^6, \text{ \&c.}$$
$$+ bx^2 = * \; bf^2z^2 + 2bfhz^3 + bh^2z^4 + 2bflz^5 + bk^2z^6,$$
$$+ 2bhkz^4 + 2bhkz^5 + 2bfmz^6$$
$$+ cx^3 = * \; * \; + cf^3z^3 + 3cf^2hz^4 + cfh^2z^5 + 3cf^2lz^6$$
$$+ 3cf^2kz^5 + \quad \text{\&c.}$$
$$3cf^2lz^6$$
$$+ 6fhkz^6$$
$$dx^4 = * \; * \; * \; + dfz^4 + 4df^3z^5 + 6df^2h^2z^6$$
$$+ 4df^3kz^6$$
$$ex^5 = * \; * \; * \; * \; + ef^5z^5 + 5ef^4hz^6$$

Maintenant si vous supofez égale à o, la somme de tous les coefficiens des termes de cette équation, vous trouverez les valeurs des coefficiens f, h, k, l, m, n, de cette maniere. La somme des coefficiens du premier terme $\left.\begin{matrix} -1 \\ af \end{matrix}\right\} z$ sera $af - 1$.

dans lequel si $af - 1 = 0$, alors $f = \frac{1}{a}$. Ainsi la somme des coefficiens du second terme $\left.\begin{matrix} ah \\ bf^2 \end{matrix}\right\} z^2$ sera $ah + f^2$. Or $ah + bf^2 = 0$, donc $h = \frac{-bf^2}{a} = \frac{-b}{a^3}$. de la même maniere celle du coefficient du troisiéme terme étant égal à o, $ak + 2bfh + cf^3 = 0$, donc $k = \frac{-2bfh - cf^3}{a} = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, de même $al + bh + 2bfk + 3cf^2h + df^4 = 0$, donne $l = \frac{-bh - 2bfk + 3cfh - df^4}{a} = \frac{-b^3}{a^7 - 4b^3} + \frac{a^7 + 2ba}{a^6 + 3bc} + \frac{a^6 - d}{a^5} = \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}$, de la même maniere $m = \frac{14b^4 + 6abd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}$, & $n = \frac{-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc - 28a^2bd + 7a^2cd + 7a^3cd + 7a^3bea^4f.}{a^{11}}$

Enfin substituant toujours les valeurs des coefficiens f, h, k, l, m, n, dans l'équation proposée $x = fz + hz^2 + kz^3 + lz^4 + mz^5 + nz^6$, &c. La racine cherchée sera $x = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7} z^4$, $+ \frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9} z^5$ &c.

Nota. S'il y a quelques termes de moins dans l'équation proposée, il est évident que ces termes manqueront également dans la racine; par exemple, si $z = ax + cx^3 + ex^5$, &c. alors $x = \frac{z}{a} - \frac{ac}{a^5} z^3 + \frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} z^5$, &c. Mais si $z = ax + bx^2 + cx^5 + dx^7 + ex^9$, &c. Alors il arrivera le contraire; car $x = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4} z^3 + \frac{3bb - ac}{a^7} z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}} z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}} z^9$, &c.

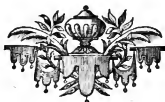


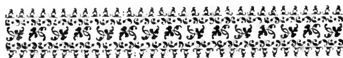
SCHOLIE.

SCHOLIE.

3. Ces deux expressions de la racine d'x ainsi trouvées, serviront de regle, pour trouver par substitution la racine d'une équation infinie proposée.

Par exemple, si on veut extraire la racine de cette équation $z = x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, &c. Il n'y a qu'à substituer dans la premiere équation 1 pour a, $-\frac{1}{2}$ pour b, $\frac{1}{3}$ à la place de c, $-\frac{1}{4}$ pour d, & $\frac{1}{5}$ pour e; vous aurez $x = z + \frac{1}{2} zz - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4$, &c. observant que la racine de cette équation $z = x - \frac{x^3}{3r} + \frac{x^5}{5r^4} - \frac{x^7}{7r^6} + \frac{x^9}{9r^8}$ &c. est $x = z + \frac{z^3}{3r^2} + \frac{2z^5}{15r^4} + \frac{17z^7}{315r^6} + \frac{62z^9}{2835r^8}$, &c. en mettant dans l'expression 1 pour a, $-\frac{1}{3r}$ pour b, $\frac{1}{3r^4}$ pour c, $-\frac{1}{7r^6}$ pour d, & $\frac{1}{9r^7}$ pour e, &c.





SECTION II.

Trouver les integrales d'une expression differentielle donnée.

DÉFINITION.

L'Integrale d'une expression differentielle donnée, est la quantité dont la differentielle est l'élement. Comme l'integrale de dx est x; celle de $dx + dy$, est $x + y$: l'integrale de $x\,dy + y\,dx$, est xy : celle de $m x^{m-1}\,dx$, est x^m : celle de $a x^{\frac{m}{n}}\,dx$, est $\frac{an}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}$.

COROLLAIRE I.

Fig. 1. 4. Si l'ordonnée PM, (y) d'une courbe, ou ligne droite, AM, coupant à angles droits l'abscisse AP (x), est multipliée par Pp (dx), qui represente une differentielle quelconque; alors l'aire APM sera l'integrale de cette differentielle; & au contraire, le rectangle formé par l'ordonnée PM, multipliée par dx, difference de AP, sera la differentielle de l'espace APM. Car ce rectangle peut être pris pour le trapeze $PMmp$, qui est la differentielle réelle de cette aire : leur difference étant seulement le petit triangle Mmn, qui est infiniment plus petit que $PMmp$; donc il peut être négligé, *suivant l'axiome premier, partie premiere.*

COROLLAIRE II.

5. D'où il est évident que la méthode inverse des fluxions, ou la méthode des integrations, revient à celle de trouver la somme d'une serie.

Scholie.

6. Nous devons observer ici qu'une integrale ne peut avoir qu'une difference, mais qu'au contraire une difference peut avoir une infinité d'integrales. Par exemple, l'integrale ax ne peut avoir que cette seule differentielle adx: mais la differentielle adx peut avoir une infinité d'integrales; car si on supose b, c, d, f, g, &c. des quantités constantes, alors $ax \pm b$, $ax \pm c$, $ax \pm f$, $ax \pm g$, &c. ou $ax \pm$ une infinité d'autres quantités constantes, donnera pour integrale non pas seulement ax, mais $ax \pm p$; or p est une quantité donnée quelconque qui peut representer une expression composée de quantités constantes. Il faut entendre la même chose dans toutes les autres expressions differentielles & integrales.

Comme il est aisé d'élever une quantité à une puissance donnée quelconque, & qu'on n'en peut pas au contraire trouver en termes finis la racine quelconque; de même dans les differentielles il est facile de trouver les differences d'une quantité quelconque variable, ou composée de variables & de constantes; mais au contraire on ne peut trouver que rarement en termes finis l'integrale d'une difference quelconque; ainsi comme dans l'algebre nous avons recours aux aproximations pour les racines sourdes qui ne peuvent pas être exactement exprimées; de même dans les integrales nous nous servons de series infinies, lorsque nous ne pouvons pas les trouver exactement.

PROBLEME PREMIER.

7. *Trouver l'integrale d'une expression differentielle donnée.*

Premier cas. 1°. Quand les expressions differentielles ne sont point mêlées de quantités constantes, mais sont les produits des integrales multipliées par les differences, ce qu'on doit entendre de toutes grandeurs variables, comme dans cette expression $xdy + ydx$, ou $xydz + zxdy + zydx$; pour lors suivant la regle on trouvera les integrales par le revers de l'operation directe; par exemple :

Au lieu de chaque differentielle substituez sa quantité variable ; ajoutez ensemble tous les termes, & divisez la somme par le nombre des termes.

Ainsi l'integrale de $x\,dy + y\,dx$, est xy, celle de $xy\,dz + zx\,dy + yz\,dx$, est xyz.

2. Quand une expression differentielle se trouve mêlée avec une puissance quelconque ; par exemple, $2x\,dy$, ou $3x^2\,dx$, ou $m\,x^{m-1}\,dx$, ou $\frac{n}{m}\,x^{\frac{n-m}{m}}\,dx$, ou $a\,x^{\frac{m}{n}}\,dx$, qui est l'expression la plus generale pour le cas dont il s'agit ; alors l'integrale se trouvera par le revers de l'operation directe & ordinaire. Car dans l'operation ordinaire on trouve la differentielle quelconque d'une grandeur, en diminuant l'exposant d'une unité, en mettant la caracteristique dx, & multipliant le tout par l'exposant de la puissance de la quantité variable. Pour trouver donc l'integrale d'une differentielle, il n'y a qu'à faire le contraire, en ajoûtant une unité à l'exposant de la quantité variable, en retranchant la caracteristique dx, & divisant le tout par l'exposant ainsi augmenté de l'unité. On en usera de même dans tous les cas semblables : voici la regle.

Retranchez la differentielle, ajoûtez l'unité à l'exposant de la quantité variable, & divisez par l'exposant ainsi augmenté de l'unité.

Ainsi l'integrale de $2x\,dx$ ou $2x^1\,dx$, sera x^2 ; car retranchant dx, on aura $2x^1$, ajoûtant 1, à l'exposant, viendra $2x^{1+1} = 2x^2$; divisant par 2, on aura $\frac{2x^2}{2} = x^2$ integrale de $2x\,dx$. De la même maniere l'integrale de $3x^2\,dx$ sera x^3 ; celle de $mx^{m-1}\,dx$, sera x^m ; celle de $\frac{n}{m}\,x^{\frac{n-m}{m}}\,dx$, sera $x^{\frac{n}{m}}$; celle de $-n\,x^{-n-1}\,dx$, sera x^{-n} ou $\frac{1}{x^n}$; celle de $a\,x^{\frac{m}{n}}\,dx$, sera $\frac{an}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}$: Car dans ce dernier cas si on ajoûte 1 à $\frac{m}{n}$ exposant de la puissance de la quantité variable, & si on retranche la differentielle dx, on aura

$ax^{\frac{m+n}{n}}$ qui, divisé par $m+n$, nouveau exposant, le quotient $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ sera l'integrale de la differentielle $ax^{\frac{m}{n}}dx$.

Autrement.

La derniere differentielle & son integrale étant plus generales qu'aucune de celles que nous avons raportées, elles peuvent servir de formules pour trouver les integrales des differentielles simples que nous avons déja citées, en leur donnant la même forme & en faisant les substitutions convenables; par exemple, pour trouver l'integrale de x^2dx en lui donnant la même forme qu'à la differentielle $ax^{\frac{m}{n}}dx$, cette differentielle se changera en $1x^{\frac{2}{1}}dx$, supposant $a=1$, $n=1$. $m=2$. En substituant 1, pour a; 1, pour n, & 2, pour m; dans l'integrale $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alors vous aurez $\frac{1}{3}x^3$, pour l'integrale de $1x^2dx$. De même l'integrale de $4\sqrt{x}dx = 4x^{\frac{1}{2}}dx$, est $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3}$.

L'integrale de $\sqrt[3]{x^5}dx = x^{\frac{5}{3}}dx$, sera $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$.

L'integrale de $\frac{1}{x^2}dx = 1x^{-2}dx$, sera $\frac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}} = -x^{-1}$, en supposant dans cet exemple $a=1$, $n=1$, & $m=2$.

L'integrale de $\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = x^{\frac{-3}{2}}dx$, sera $\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$

Enfin l'integrale de $\frac{1}{x}dx = 1x^{-\frac{1}{1}}dx$, sera $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} =$

$\frac{1}{0} x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} = \infty$. Car ici $a = 1$, $m = -1$, & $n = 1$.

Second cas. Si une expreſſion differentielle conſiſte dans un nombre quelconque de termes ſimples comme ceux *du premier cas*, *n.* 2. alors l'integrale ſera compoſée d'autant de termes joints enſemble par les ſignes + & —, qu'il y a de termes dans l'expreſſion differentielle ; par exemple :

L'integrale de $x^2 dx + x^{\frac{3}{2}} dx$, ou $x^2 + x^{\frac{3}{2}} \times dx$, ſera $\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$. Car, *par le premier cas*, *n.* 2. l'integrale de $x^2 dx$ eſt $\frac{1}{3} x^3$; celle de $x^{\frac{3}{2}} dx$, eſt $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$. Par conſequent la ſomme de ces integrales ſera l'integrale de la ſomme de ces differentielles.

De même l'integrale de $x^2 dx - x^{\frac{3}{2}} dx$ ſera $\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$.

Celle de $3 x dx - 2 x^2 dx + x^3 dx - 5 x^4 dx$, ſera $\frac{3}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 - x^5$.

Obſervez que celle de $x^{-2} dx + x^{-\frac{3}{2}} dx$, ou de $x^{-2} dx - x^{-\frac{3}{2}} dx$, ſera $- x^{-1} - 2 x^{-\frac{1}{2}}$ ou $- x^{-1} + 2 x^{-\frac{1}{2}}$; en changeant les ſignes on aura leurs valeurs affirmatives, ſçavoir $x^{-1} + 2 x^{-\frac{1}{2}}$ ou $x^{-1} - 2 x^{-\frac{1}{2}}$.

Celle de $x^2 dx + x^{-2} dx$, ſera $\frac{1}{3} x^3 - x^{-1}$.

Troiſiéme cas. Quand les termes d'une expreſſion diffe-

rentielle se trouvent plus composés que ceux que nous venons de parcourir, il faut d'abord les reduire à de simples termes, en réduisant l'expression, *comme on a fait dans les cas précedens*, ou une partie en une serie infinie, suivant les regles de la premiere section; ensuite l'integrale peut aisément se trouver suivant les regles déja données; par exemple, que $\frac{b}{a+x}dx$ soit une differentielle; il faut la réduire en une serie infinie, (*premier Probleme, Section premiere.*) on aura $\frac{b}{a}dx - \frac{b}{a^2}xdx + \frac{b}{a^3}x^2dx - \frac{b}{a^4}x^3dx$, &c. dont l'integrale, *suivant le second cas*, sera $\frac{b}{a}x - \frac{b}{2a^2}x^2 + \frac{b}{3a^3}x^3 - \frac{b}{4a^4}x^4$, &c.

De même l'integrale de $\frac{1}{1+xx}dx = $ (*) $1dx - x^2dx +$ * art. 1.
$x^4dx - x^6dx$, &c. sera (*) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$, &c. * art. 7.

L'integrale de $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x}dx = $ (*) $2x^{\frac{1}{2}}dx - 2xdx$ * art. 1.
$+ 7x^{\frac{3}{2}}dx - 13x^2dx + 34x^{\frac{5}{2}}dx$, &c. sera (*) $\frac{4}{3}$ * art. 7.
$x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$, &c.

De même l'integrale de $\sqrt{aa+xx} \times dx = $ (*) $adx +$ * art. 2.
$\frac{x^2}{2a}dx - \frac{x^4}{8a^3}dx + \frac{x^6}{16a^5}dx - \frac{5x^8}{128a^7}dx$, sera (*) $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3}$ * art. 7.
$+ \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$, &c.

Celle de $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$, sera

$$x + \left.\begin{matrix} \frac{1}{6}b \\ + \frac{1}{6}a \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} \frac{3}{40}b^2 \\ + \frac{1}{20}ab \\ - \frac{1}{40}a^2 \end{matrix}\right\} x^5, \text{ \&c.}$$

On peut trouver par les mêmes regles l'integrale de $d\,x^m \times \overline{e + f x^n}^p \times d\,x$, où dans cette expression d, e, f, sont des quantités données ou connuës, & m, n, p, sont les exposans des quantités où ils sont attachés.

Faites $\frac{m+1}{n} = r$, $p + r = s$, $\frac{d}{nf} \times \overline{e + f x^n}^{p+1} = Q$, & $r n - n = t$: Alors l'integrale sera, $Q \times \frac{x^t}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{e A}{f x^n} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{e B}{f x^n} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{e C}{f x^n} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{e D}{f x^n}$ *&c.*

Les lettres A, B, C, D, *&c.* dénotent les termes qui précedent; par exemple, A, le terme $\frac{x^t}{s}$, B le terme $-\frac{r-1}{s-1} \times \frac{e A}{f x^n}$, *&c.* Ces series, quand r est une fraction ou un nombre négatif, ne sont point terminées, c'est-à-dire, que l'integrale consiste dans une serie d'une infinité de termes. Mais quand r est une grandeur entiere ou affirmative, pour lors l'integrale sera composée d'un nombre fini de termes ; par exemple, autant qu'il y aura d'unités dans r.

Autrement.

Cette derniere differentielle & son integrale peuvent servir de formule generale pour trouver les integrales de toutes sortes d'expressions differentielles, pourvû qu'elles soient binomes : pour cet effet, on n'a qu'à leur donner la même forme qu'à l'expression differentielle, & ensuite les substituer, comme vous pourrez voir dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

Trouver l'integrale de $\sqrt{a x} \times d x$; réduisez cette expression à la forme ci-devant; alors $1\, x^0 \times \overline{0 + a x^1}^{\frac{1}{2}}\, d x = D\, x^m \times \overline{e + f x^n}^p\, d x$, dans laquelle $D = 1$, $m = 0$, $f = a$,

$f = a$, $n = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times ax^{\frac{3}{2}}$, $t = 0$, $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$; & en ſubſtituant ces valeurs dans l'integrale generale ci-devant, on aura $\frac{1}{a} \times ax^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{ax}$, pour l'integrale cherchée, & en general l'integrale de $cx^n dx$, eſt $\frac{c}{n+1} x^{n+1}$.

Exemple II.

$\frac{a^4x}{c^4 - 2ccxx + x^4} dx$ étant réduite à la forme generale de l'expreſſion differentielle binome, donnera $a^4x \times \overline{cc - xx}^{-2}$, ou $a^4x^{-3} \times \overline{-1 + ccx^{-2}}^{-2} = Dx^m \times \overline{e + fx^n}^p$. Dans le premier cas $D = a^4$, $m = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $n = 2$, $p = -2$. D'où $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - xx}^{-1}$, c'eſt-à-dire, $-\frac{a^4}{2cc - 2xx}$, $t = 0$. Alors l'integrale eſt $Q \times -\frac{x^0}{1}$, c'eſt-à-dire, $= \frac{a^4}{2cc - 2xx}$. Dans le ſecond cas $D = a^4$, $m = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $n = -2$, $p = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccx^{-2}}^{-1}$; c'eſt-à-dire, $-\frac{a^4xx}{2c^4 - 2ccxx}$, $t = 0$; & l'integrale ſera $Q \times -\frac{x^0}{1} = \frac{a^4xx}{2c^4 - 2ccxx}$.

Exemple III.

$\overline{\frac{a^5}{x^5}\sqrt{bx + xx}dx}$ réduit à la forme generale, ſera $a^5x^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + x}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ou $a^5x^{-4} \times \overline{1 + bx^{-1}}^{\frac{1}{2}} \times dx$. Dans le premier cas $D = a^5$, $m = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $n = p = \frac{1}{2}$, & de même $r = -\frac{7}{2}$ &c. Maintenant, ſupoſant r négatif, j'eſſaye l'autre cas; alors $D = a^5$, $m = -4$, $e = 1$, $f = b$,

$n = -1$, $p = \frac{1}{2}$. De même $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $\mathcal{Q} = -\frac{a^5}{b} \times \overline{1+bx^{-1}}^{\frac{3}{2}}$ ou $-\frac{a^5x+a^5b}{bxx}\sqrt{xx+bx}$, & $t = -2$: d'où l'integrale est $\mathcal{Q} \times \frac{x^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{x^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{x^0}{3\frac{1}{2}bb}$, c'est-à-dire, $-\frac{30bb \mp 24bx - 16xx}{105bbxx} \times \frac{a^5x+a^5b}{bxx}\sqrt{xx+bx}$.

Exemple IV.

$\frac{bx^{\frac{1}{3}}dx}{\sqrt[5]{c^3 - 3accx^{\frac{2}{3}} + 3aacx^{\frac{4}{3}} - a^3xx}}$ étant réduit à la forme generale comme ci-dessus, donnera $bx^{\frac{2}{3}} \times \overline{c-ax^{\frac{2}{3}}}^{-\frac{3}{5}} \times dx$, ou $D = b$, $m = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $\mathcal{Q} = -\frac{2b}{2a} \times \overline{c-ax^{\frac{2}{3}}}^{\frac{2}{5}}$, $t = \frac{2}{3}$: Alors l'integrale sera $\mathcal{Q} \times \frac{5x^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times -\frac{5c}{7a}$, qui est la même chose que $-\frac{30abx^{\frac{2}{3}}+75bc}{28aa} \times \overline{c-ax^{\frac{2}{3}}}^{\frac{2}{5}}$.

Scholie I.

8. On peut trouver, par la formule précedente, une formule generale pour les expressions differentielles trinomes ou plus composées, qui servira très-utilement pour trouver les integrales des differentielles proposées, qui par-là sont moins compliquées, & peuvent être réduites à la même forme que ces formules. Mais comme cette voye est extrêmement longue, il vaut mieux chercher ces integrales, *par la premiere méthode du troisiéme cas*, en réduisant ces expressions composées en des series infinies ; ce qui les simplifie.

On ne doit point réduire en series infinies ces expressions composées, qu'on n'ait auparavant essayé par addition, soustraction, multiplication, division, &c. les quantités changeantes; car souvent on les réduit, par cette voye, à des formes simples, *comme au second cas ci-dessus*, où par ce moyen on trouve en termes finis leurs integrales.

Il est nécessaire d'observer ici que lorsqu'une expression differentielle & radicale se trouve de façon que la partie hors du signe est la differentielle de ce qui est sous le signe, ou est dans un raport quelconque avec elle; alors l'integrale se trouvera toujours en termes finis par substitution, *suivant le second cas ci-dessus.*

EXEMPLE I.

L'integrale de $adx\sqrt{ax-aa}$, ou $\overline{ax-aa}^{\frac{1}{2}} \times adx$, où adx, est la differentielle de $\sqrt{ax-aa}$, ou de $\overline{ax-aa}^{\frac{1}{2}}$, sera *suivant le second cas*, $\frac{2}{3}\overline{ax-aa}^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}ax - aa \sqrt{ax-aa}$.

EXEMPLE II.

L'integrale de $2xdx\sqrt{xx+aa}$, ou $\overline{xx+aa}^{\frac{1}{2}} \times 2xdx$, où $2xdx$, est la difference de $\overline{xx+aa}^{\frac{1}{2}}$ sera, $\frac{2}{3}\overline{xx+aa}^{\frac{3}{2}} = \frac{2xx+2aa}{3}\sqrt{xx+aa}$.

EXEMPLE III.

L'integrale de $\overline{a+x}^{\frac{m}{n}} \times dx$, sera $\frac{n}{m+n}\overline{a+x}^{\frac{m+n}{n}}$.

EXEMPLE IV.

L'integrale de $xdx\sqrt{xx+aa}$, dont la differentielle xdx hors du signe, est à celle qui y est comprise $2xdx$, comme 1 à 2; l'integrale donc sera $\frac{1}{3}xx + \frac{1}{3}ax$

$\sqrt{xx+aa}$. Car faisant $\sqrt{xx+aa}=z$; alors $2zdz=2xdx$, & $\sqrt{xx+aa} \times xdx=z^2dz$, dont l'integrale, *suivant le second cas*, $=\frac{1}{3}z^3=$, par la substitution à la premiere integrale déja trouvée ; de cette maniere l'integrale *du second exemple* peut se trouver en mettant $xx+aa=z^2$.

Exemple V.

L'integrale de $\overline{x^m+a^q}^n \times x^{m-1}dx$, dont la differentielle $x^{m-1}dx$ hors du signe, est à la difference de la quantité qui y est comprise; *par exemple*, $mx^{m-1}dx$, étant comme 1 à m, donnera pour integrale $\frac{1}{mn+m}\overline{x^m+a^q}^{n+1}$: car si on fait $x^m+a^q=z$; alors $\overline{x^m+a^q}^n=z^n$, & $\overline{x^m+a^q}^{n-1}=z^{n-1}$; de même $nz^{n-1}dz=nmx^{m-1}dx \times \overline{x^m+a^q}^{n-1}= nmx^{m-1}dx \times z^{n-1}$; & divisant par nz^{n-1}, on aura $dz=mx^{m-1}dx$, ou $x^{m-1}dx=\frac{dz}{m}$; d'où on tire $x^{m-1}dx \times \overline{x^m+a^q}^n=\frac{z^n dx}{m}$; & vous aurez pour integrale $\frac{1}{nm+m}z^{n+1}=\frac{1}{nm+m}\overline{x^m+a^q}^{n+1}$.

Il est à propos de donner ici de simples differences *tirées des Quadratures des courbes de M. le Chevalier Newton*, dont les integrales se trouvent à côté en termes finis. Par ce moyen à la premiere inspection on trouve l'integrale d'une difference, lorsque cette difference se trouve conforme à la table, ou par le moyen d'une substitution facile. Dans cette table z est la quantité variable & D, e, f, g, h, n, sont des quantités constantes ou données.



		Formes des Differences.	Integrales.
I.		$Dz^{n-1}dz$	Integ. $= \frac{D}{n} z^n$.
II.		$\frac{Dz^{n-1}dz}{e^2 + 2efz^n + f^2z^{2n}}$	Integ. $= \frac{Dz^n}{ne^2 + nefz^n}$, où $\frac{-D}{nef + nf^2z^n}$.
III.	1.	$Dz^{n-1}dz \times \sqrt{e + fz^n}$	Integ. $= \frac{2D}{3nf} R^3$, R étant $= \sqrt{e + fz^n}$
	2.	$Dz^{2n-1}dz \times \sqrt{e + fz^n}$	Integ. $= \frac{-4e + 6fz^n}{15nf^2} DR^3$.
	3.	$Dz^{3n-1}dz \times \sqrt{e + fz^n}$	Integ. $= \frac{16e^2 - 24efz^n + 30f^2z^{2n}}{105nf^3} DR^3$.
	4.	$Dz^{4n-1}dz \times \sqrt{e + fz^n}$	Integ. $= \frac{-96e^3 + 144e^2fz^n - 180ef^2z^{2n} + 210f^3z^{3n}}{945nf^4} DR^3$
IV.	1.	$\frac{Dz^{n-1}dz}{\sqrt{e + fz^n}}$	Integ. $= \frac{2D}{nf} R$.
	2.	$\frac{Dz^{2n-1}dz}{\sqrt{e + fz^n}}$	Integ. $= \frac{-4e + 2fz^n}{3nf^2} DR$.
	3.	$\frac{Dz^{3n-1}dz}{\sqrt{e + fz^n}}$	Integ. $= \frac{16e^2 - 8efz^n + 6f^2z^{2n}}{15nf^3} DR$.
	4.	$\frac{Dz^{4n-1}dz}{\sqrt{e + fz^n}}$	Integ. $= \frac{-96e^3 + 48e^2fz^n - 36ef^2z^{2n} + 30f^3z^{3n}}{105nf^3} DR$.

Scholie.

Je vais, avant que de finir cette section, ajouter un mot

ſur l'excellente méthode de feu *M. Cottes*, Profeſſeur d'Aſtronomie & de Philoſophie experimentale dans l'Univerſité de Cambrige, publiée après ſa mort ſous le titre *de Harmonia Menſurarum*, par ſon ſucceſſeur M. Smith, touchant la maniere de trouver les integrales des differentielles par les meſures des raports & des angles.

On évite par cette méthode la peine de réduire les quantités en ſeries infinies, qui ſe trouvent très-incommodes en bien des occaſions; ſouvent même à cauſe de leur lenteur à converger on ne s'en ſert pas. Mais la bonne façon pour integrer les differences, eſt de les trouver géométriquement, à l'aide des amples tables de Logarithmes deBriggs; de même que pour trouver la meſure des raiſons & des raports, on ſe ſert d'une grande table de ſinus & tangentes pour la meſure des angles. De-là on peut tirer un merveilleux moyen pour réſoudre tout probleme quelque composé qu'il ſoit, comme la quadrature d'une eſpace curviligne, la rectification des courbes, la cubation des ſolides, *&c.* dans leſquels les integrales des differentielles données ſont employées. Je donnerai pluſieurs exemples à ce ſujet.

Dans le livre que je viens de citer, il y a deux ſeries ou tables, où à la tête de chaque page ſe trouvent pluſieurs formes de differences avec leurs integrales qui ſont exprimées au-deſſous par la meſure des raiſons ou des angles. Une de ces deux ſeries eſt composée par *M. Cottes* lui-même, & l'autre par le *Docteur Smith*. Dans les tables de M.Cottes, auſquelles je me bornerai, comme étant ſuffiſantes pour ce que nous nous propoſons, & même pour ce qui ſe preſente ordinairement, z eſt la quantité variable; D, e, f, ſont des quantités conſtantes; n eſt un expoſant general d'une puiſſance quelconque de z, θ un nombre quelconque affirmatif ou negatif, & les quantités R, S, T, ſont toujours les trois côtés d'un triangle rectangle, dont les valeurs placées au bas de chaque page, expriment le raport ou l'angle; & c'eſt par leurs meſures qu'on a les integrales des differences données. Si R eſt la racine quarrée d'une quantité affirmative, elle exprime une raiſon, étant toujours comme $R+T$, à S. Mais ſi R eſt la racine quarrée d'une quantité négative, elle dénote un angle qui ſera toujours comme la tengente & la ſecante ſont au rayon, ou comme

T & S eſt à R, où la quantité négative eſt changée en affirmative. Dans les colonnes de chaque page des tables, où θ eſt à la tête, ſont une partie des valeurs affirmative & négative de θ, vis-à-vis leſquelles ſe trouvent les integrales des differences, comme dans la ſeconde forme $\frac{Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{e + fz^n} dz$; quand $\theta = 2$, l'integrale eſt $\frac{2Dz^{\frac{3}{2}n}}{3nf} - \frac{2Dez^{\frac{1}{2}n}}{nff} + \frac{2e}{nff} DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$; quand $\theta = 0$, l'integrale eſt $\frac{2}{ne} DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$; & quand $\theta = -1$, l'integrale eſt $\frac{-2D}{nez^{\frac{1}{2}n}} + \frac{2}{ne} DR \left| \frac{r+t}{s} \right.$; ainſi des autres.

Mais on ne peut bien déterminer ces integrales que lorſque la quantité $R \left| \frac{R+T}{S} \right.$ eſt connuë, qu'on apelle la meſure du raport, ou raiſon de $R+T$ & S au module R, quand R eſt affirmatif, ou juſqu'à ce que la quantité $\frac{2e}{nff} DR \left| \frac{T+R}{S} \right.$ ou $\frac{2}{ne} DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$ ou $\frac{2}{ne} Dr \left| \frac{r+t}{s} \right.$, ſoit trouvée dans pluſieurs integrales, dont le premier eſt la meſure ou raport de $R+T$, & de S au module $\frac{2e}{nff} DR$: le ſecond eſt la meſure du raport de $R+T$ & de S au module $\frac{2D}{n} R$; & le troiſiéme de $R+T$, & de S au module $\frac{2}{ne} DR$. Or quand R eſt négatif, la quantité $R \left| \frac{R+T}{S} \right.$ eſt $=$ à la meſure d'un angle dont le rayon, la tengente, & la ſecante, ſont les valeurs reſpectives de R, T & S au rayon R, comme à un module. Je donnerai bientôt la maniere de trouver la meſure d'un raport ou d'un angle à un module donné; mais il eſt à propos de donner auparavant quelques définitions ou explications des termes, pour ſe rendre plus claires, & afin qu'une perſonne puiſſe entendre avec ordre l'uſage de ces excellentes tables, ſans être obligé de lire les propoſitions de la premiere partie *de harmonia menſurarum*, qui ſont traitées trop generalement pour être conçuës par une médiocre capacité, & ſans beaucoup d'aplication.

DEFINITION I.

La raiſon d'un raport eſt une quantité quelconque proportionnelle à ce raport ; c'eſt-à-dire, ſi M, eſt la meſure du raport de A, à B, ou de $\frac{A}{B}$; & m, la meſure du raport de a à b, ou $\frac{a}{b}$; alors on aura $M : \frac{A}{B} :: m : \frac{a}{b}$. Ainſi les raiſons égales ont les mêmes meſures : ſi un raport eſt le double de l'autre, la meſure du premier ſera double de celui du ſecond ; ſi le premier eſt triple du ſecond, la meſure du premier ſera triple de celle du dernier ; ſi la moitié, la moitié, *&c.* de ſorte que ſi on augmente ou diminuë par compoſition ou reſolution, ſa meſure ſera également & proportionnellement augmentée ou diminuée.

Il faut obſerver que la meſure d'un raport d'égalité eſt o, & ſi la meſure d'un raport d'une quantité plus grande à une moindre, eſt ſupoſée poſitive, alors la meſure du raport d'une quantité petite comparée à une grande, ſera négative.

DEFINITION II.

La meſure numerique d'un raport, eſt l'excès du logarithme d'un nombre marquant l'antecedent au-deſſus du logarithme d'un nombre exprimant le conſequent ; c'eſt-à-dire, le logarithme du quotient de la diviſion de l'antecedent par le conſequent, eſt la meſure numerique d'un raport numerique.

DEFINITION III.

La meſure trigonometrique d'un angle, eſt la quantité de degrés, de minutes, de ſecondes, *&c.* compris dans cet angle.

DEFINITION IV.

Le module des logarithmes de Briggs, Vlaque, &c. eſt o, 434294481903, *&c.* par lequel l'unité étant diviſée, le quotient 2, 302585092994, *&c.* ſera le module réciproque du logarithme déja cité, c'eſt-à-dire, le quotient de la diviſion d'une quantité quelconque par le premier module, eſt égale au produit de cette quantité multipliée par le module reciproque. Cette

Cette définition, ou plûtôt cette description de la quantité du module des logarithmes, est suffisante pour ce que je me propose. Ceux qui n'en seront pas satisfaits, pourront consulter *la premiere proposition*, les corollaires & les scholies de la premiere partie *de harmonia mensurarum*. On peut en user de la même façon pour les définitions suivantes, qui sont des conséquences *de la proposition*. Voyez les Notes de l'ingénieux M. *Smith*, page 94, à la fin de ses *harmonia mensurarum*.

DEFINITION V.

Le module trigonometrique, ou le nombre de dégrés contenus dans un arc de cercle égal au rayon, est à 180 degrés, comme le rayon du cercle est à la demie circonference, est 57° 17′ 44″, ou 57, 2957795130; par lequel l'unité étant divisée, le module réciproque de la regle trigonometrique est 0, 0174532925.

PROPOSITION I.

9. *Trouver la mesure d'un raport donné, à un module donné; ou trouver la quantité de l'expression* $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, *R étant la racine quarrée d'une quantité affirmative, & R, T, S, les trois côtés d'un triangle rectangle.*

Formule. Comme le module du logarithme 0, 434294481903, *&c.* est au module *R* du raport *R+T* à *S*; ainsi le logarithme de ce raport est à sa mesure, ayant *R* pour module qui est égal à $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ ou bien multipliez le produit du logarithme du raport proposé *R+T* à *S*, & de la quantité *R* comme module, par le module réciproque 2, 302585092994, *&c.* ce second produit est la mesure du raport *R+T* à *S* avec *R*, qui en est le module, & il est égal à la valeur de $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ quantité cherchée.

Voici un exemple numerique; soit $R=8$, $T=6$, $S=10$.

Le module du logarithme 0, 434294481903 : 8 : : le logarithme (de $\frac{14}{10}$) 0, 1461280 : 2, 6916777= à la mesure

du raport de 14 & 10 au module 8, égal à 8 $\left|\frac{8+6}{10}\right.$.

Ou pour abreger, 1: *recip. mod. log.* 2, 302585092994 :: le logarithme (de $\frac{14}{10}$) 0, 1461280 × 8 : module donné, 2, 6916777 mesure du raport comme ci-devant.

Fig. 2. Ce probleme peut être résolu sans calcul, par le moyen du secteur d'une hyperbole, de la maniere suivante. Que *AG* soit une hyperbole, *CA* la moitié de son diametre, *CB*, la moitié du conjugué, & *CE*, une asymptote. Tirez *AQ*, parallele à *CB*, ensuite faites $R : T :: AQ : AD$, & si $CA \times CB$ est $= 2R$, le secteur $CAM = R\left|\frac{R+T}{S}\right.$; le triangle *CAD* étant égal à *T*, quand *T* est moindre que *R*, & le triangle *CBE*, égal à *T*, quand *T* est plus grand que *R*.

COROLLAIRE I.

10. Il suit de-là que si *m* est un module constant du logarithme, & *l* le logarithme du raport $\frac{R+T}{S}$, pour lors on aura $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R \times \frac{l}{m}$.

COROLLAIRE II.

11. Il suit encore que $\frac{nR}{m}\left|\frac{T^{\frac{m}{n}}}{S^{\frac{m}{n}}}\right. = R\left|\frac{T}{S}\right.$: *m* étant un nombre entier quelconque, & *n* un autre, cette forme suit la nature des logarithmes.



PROBLEME II.

12. *Trouver la mesure d'un angle, dont le rayon est comme R, la tangente comme T, & la secante comme S, à la quantité R, comme module : ou trouver la valeur de cette expression* $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, *R étant la racine quarrée d'une quantité négative, par conséquent impossible ; toutes étant des quantités données.*

Formule. Dites premierement, comme la valeur de *R* est à la valeur de *T*, ou comme la valeur de *R* est à la valeur de *S*, ainsi dans les tables les rayons des tangentes & secantes, sont aux tangentes ou secantes de l'angle à mesurer, vis-à-vis desquels se trouve la valeur de cet angle en degrés ou minutes, *&c.* en étant la mesure trigonometrique : ensuite dites comme le module trigonometrique 57°, 17′, 44″, ou 57, 2957795130. est à la mesure trigonometrique juste de l'angle, ainsi le module de cet angle ; par exemple, *R* est à la mesure dudit angle, ayant *R* pour module égal à la quantité $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$; ou bien multipliez le produit de la mesure trigonometrique de l'angle par le module *R*, par le module réciproque logarithmique 0, 0174532925, & ce second produit est la mesure de l'angle au module donné *R*.

En voici un exemple numerique ; que *R*=16, *T*=12, *S*=20, on a 16 : 12, comme le rayon 10000000 : 7500000 = à la tangente, & 16 : 20 : : le rayon 10000000 : 12500000 = à la secante.

Vous trouverez vis-à-vis dans les tables 36°, 52′, 6″, pour la mesure trigonometrique de l'angle.

Ou bien ; le module trigonometrique 57, 2957795130 : à la mesure trigonometrique 36, 86833331 : : le module 16 : 10. 4330985 = à la mesure de l'angle, dont le rayon est comme 16, la tangente comme 12, & la secante comme 20, au module 16 ; ou égal à $16\left|\frac{16+12}{20}\right.$.

Observez qu'on abrege bien plus en se servant du module

réciproque 0174532925. qu'en se servant du directe, & les opérations sont bien plus courtes, en se servant des logarithmes pour trouver le quatriéme terme de la proportion dans les problemes précedens comme dans celui-ci.

On peut résoudre également ce probleme, ou par le moyen d'un secteur de cercle, ou par celui d'un élipse, de
Fig. 3. la maniere suivante. Que CA, CB, soient les rayons d'un quart de cercle, ou demies axes d'un élipse AB; tirez l'une sur l'autre égal à $2R$; tirez AQ, parallele à CB, & BG, parallele à CA; faites ensuite $R:T::CB:AD$; tirez la ligne droite $CMDG$; alors le secteur CAM est égal à $R\left|\frac{R+T}{S}\right.$ quand R est plus grand que $T=$ au triangle CAD, & le secteur $CBM=R\left|\frac{R+T}{S}\right.$, quand R est moindre que $T=$ au triangle CBG.

Remarquez que quand par hazard S, se trouve la racine quarrée d'une quantité négative, & par conséquent impossible, vous pouvez changer le signe, & vous parviendrez également bien à la solution.

Corollaire.

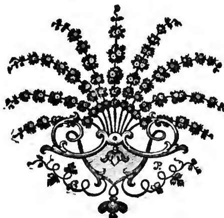
13. Si a est un angle dont les rayons, tangentes & sécantes, soient R, T, S, & que m soit un module constant, alors $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = \frac{aR}{m}$.

Scholie.

14. R, T, S, étant toujours les trois côtés d'un triangle rectangle; donc $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R\left|\frac{S}{T-R}\right.$, suposant T l'hypothenuse; car par la proprieté du triangle rectangle $T=\sqrt{RR+SS}$; & de même $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R\left|\frac{R+\sqrt{RR+SS}}{S}\right.$, & R, $\left|\frac{S}{T-R}\right. = R\left|\frac{S}{\sqrt{RR-SS}-R}\right.$; & multipliant en croix, vous trouverez $\overline{\sqrt{RR+SS}+R} \times \overline{\sqrt{RR+SS}-R} = SS$; la somme de deux nombres multipliés par leurs differences étant égale

à la difference de leurs quarrés ; ainsi $\frac{R+\sqrt{RR+SS}}{S}$ est $=$ $\frac{S}{-R+\sqrt{RR+SS}}$; c'est-à-dire $\frac{R+T}{S} = \frac{S}{T-R}$; conséquemment $R\left|\frac{R+T}{S}\right. = R\left|\frac{S}{T-R}\right.$.

Ceci paroît évident par la figure 83 ; car que l'hypothenuse $AB=T$, la perpendiculaire $CB=R$, & la baze $AC=S$, continuë AB, jusqu'à ce que $BD=BC=R$, faites $BE=BC$; alors vous aurez $AD=R+T$, & $AE=T-R$: si l'on décrit un cercle autour de B, de l'intervale BC, comme rayon, il passera par E & par D, & AC le touchera au point C ; par conséquent *par la trente-sixiéme proposition, liv. troisiéme d'Eucl.* $\overline{AC}^2$ $(SS) = AD \times AE = \overline{R+T} \times \overline{T-R}$; donc $\frac{R+T}{S} = \frac{S}{T-R}$.





SECTION III.

Usage de la methode des integrales pour la quadrature des espaces curvilignes.

PROBLEME.

15. *Quarrer un espace curviligne.*

Fig. 1. AYant trouvé l'équation qui exprime le raport d'une abscisse quelconque AP (x) à son ordonnée correspondante PM (y) qui la coupe à angles droits, cherchez d'abord la valeur de y qu'il faut multiplier par dx ; l'integrale de ce produit exprimera la quadrature de l'espace mixtiligne indéterminé, compris par l'abscisse AP, l'ordonnée PM, & la courbe AM ; & si l'abscisse AP est déterminée, par Ex: égale à une grandeur donnée a, la courbe conséquemment le sera aussi ; ainsi en substituant a pour x dans l'integrale déja citée, il en résultera une expression qui sera la quadrature de l'espace mixtiligne déterminé. Les exemples suivans rendront ceci plus intelligible.

Fig. 4. Mais si l'aire $CDEF$ est contenuë entre deux courbes ou lignes droites DE, CF, la ligne droite CD, & la partie d'une droite EF d'une ligne quelconque AE, tirée d'un point donné A, pris dans la droite CD; alors tirez Afe, infiniment proche de AFE, & du centre A décrivez les petits arcs Fp, Eq; ensuite par la nature de la courbe, trouvez l'aire de l'espace quadrilatere $FEqp$, qui est égal à la difference des petits secteurs AFp, AEq, ou égal à $\frac{1}{2}AE \times Eq - \frac{1}{2}AF \times Fp$. égale à l'espace $FEef$, difference de l'aire $CDEF$, dont l'integrale sera égale audit aire. Je donnerai dans la suite des exemples de ceci.

EXEMPLE I.

16. *Trouver l'aire d'un triangle ABC.*

Tirez *AD*, perpendiculaire à un des côtés, comme *BC*, dans laquelle prenez entre le point *A* & *D* le point *P*, sur lequel tirez la ligne *MN* perpendiculaire à *AD*; que *mn* soit infiniment proche & parallele à *MN*, & tirez *Mp*, *Nq*, perpendiculaires à *MN*; alors le rectangle *MNqp*, compris par *Mp* & *Nq*, ou *Pp*, & l'ordonnée *MN*, est l'élement de l'aire indéterminée *AMN*, qu'on trouvera ainsi. Fig. 5.

Que la quantité variable *AP* soit apellée x, *PM*, y, les constantes & données *AD*, a; *CB*, b, & parce que *MN* est parallele à *BC*, on aura $AD\ (a) : CB\ (b) :: AP\ (x) : MN\ (y)$, d'où on tire $y = \frac{bx}{a}$: mais $Pp\ (= Mp = Nq) = dx$: ainsi l'élement de l'aire indéfinie *AMN*, est $\frac{bx}{a} dx$, dont l'integrale est, *selon le second cas*, $\frac{bx^2}{2a}$ qui est égale à l'aire *AMN*; maintenant si au lieu de *AP* (x) vous substituez *AD* (a) vous aurez $\frac{ba^2}{2a}$ $(= \frac{1}{2} ab) = \frac{1}{2} AD \times CB$, aire totale de tout le triangle *ACB*; ce que nous sçavons d'ailleurs être vrai par les élemens de géometrie.

Nous n'oublierons point ici de donner la maniere de trouver, par les integrales, l'aire d'un trapeze *GPCB* ayant deux côtés *PC*, *GB*, paralleles, & les angles *B*, *C*, droits : il est vrai qu'on les trouve plus promptement par les élemens communs de la géometrie, mais il est agréable de découvrir la verité par plusieurs points de vûë. Fig. 6.

Pour y parvenir, continuez *CB* & *PG*, jusqu'à leurs rencontres en *A*, du point *A* tirez *Amp*, infiniment proche de *AGP*, & des distances *Am*, *Ap*; décrivez du centre *A* les arcs semblables *mr*, *pn*, ensuite faites $AB = a$, $BC = b$, $BG = x$, $AG = y$. Maintenant à cause de la similitude des triangles *ACP*, *pPn*, qui ont les angles *C*, & *n* droits, & l'angle *P* commun, on aura $AG\ (y) : AB\ (a) :: Gm\ (dx) : mr = \frac{adx}{y}$, qui étant multiplié par $\frac{1}{2} Ar\ (= \frac{1}{2} AG = \frac{y}{2})$,

donnera pour produit $\frac{adx}{2}$, égale à l'aire du petit triangle *Arm*, ou *AGm*, qui ne differe seulement que du triangle *Gmr*, infiniment plus petit qu'aucun d'eux.

Les triangles *ABG*, *ACP*, étant semblables, on aura *AB* $(a) : AG\ (y) :: BC\ (b) : GP = \frac{by}{a}$; & par conséquent $AP = \frac{by}{a} + y$, & parce que *Am*, *AG*, & *AP*, *Ap* different seulement les uns des autres d'une grandeur infiniment petite; ainsi on peut prendre *Am*, pour *AG*, & *Ap*, pour *AP*, ce qui étant accordé, & les triangles *Amr*, *Apn*, pris pour semblables, on aura $AG\ (y) : rm\ (\frac{adx}{y}) :: AP\ (\frac{by}{a} + y) : pn = \frac{bdx}{y} + \frac{adx}{y}$, qui étant multiplié par $\frac{1}{2} AP\ (\frac{by}{2a} + \frac{y}{2})$ donnera pour produit $\frac{bbdx}{2a} + bdx + \frac{1}{2} adx$, égale à l'aire du triangle *Apn*, ou *APp*, duquel retranchant l'aire du triangle $AmG\ (\frac{adx}{2})$ trouvée ci-devant; le reste $bdx + \frac{bb}{2a} dx$, est l'aire du trapeze *mpnr*, qu'on peut regarder pour l'aire du trapeze *mpPG*, qui est l'élement du trapeze *BCPG*; mais l'integrale de cet élement est $bx + \frac{bbx}{2a} = \frac{2abx + bbx}{2a} = \overline{\frac{2ax + xb}{a}} \times \frac{b}{2}$; mais $\frac{ax + bx}{a} = PC$, ainsi puisque par la similitude des triangles *ABG*, *ACP*. $AB\ (a) : BG\ (x) :: AC\ (a+b) : CP = \frac{ax + bx}{a}$; donc $\overline{GB + PC} \times \frac{1}{2} BC =$ l'aire du trapeze *GPCB*; ce que nous sçavions déja être vrai par les élemens ordinaires de la géometrie.

EXEMPLE II.

17. *Trouver l'aire, ou quarrer l'espace parabolique ordinaire A B D.*

Fig. 1. Nommez les quantités connuës *AD*, a; *BD*, b, l'abcisse invariable *AP*, x, l'ordonnée correspondante *PM*, y, faites $Pp = dx$. Maintenant l'équation qui exprime le raport de chaque *AP*, x, à *PM*, y, est $px = yy$; d'où on tire $y =$

$=\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$: Ainſi le petit rectangle $PMnp$, qui eſt égal à l'élement de l'eſpace indéfini AMP, ſera $\sqrt{px}\times dx$; c'eſt-à-dire, $ydx=p^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}dx$, dont *ſelon le ſecond cas*, l'integrale eſt $=(\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{px^3}=\frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2})\frac{2}{3}xy$, égale à l'eſpace indéterminée AMP, en ſubſtituant a pour x, & b, pour y, dans cette integrale; on aura $\frac{2}{3}ab=\frac{2}{3}AP\times PM$; c'eſt-à-dire, que l'eſpace parabolique eſt au rectangle formé par la moitié de l'ordonnée & par l'abſciſſe, comme $\frac{2}{3}xy$ eſt à xy, ou comme 2 eſt à 3.

EXEMPLE III.

18. *Quarrer les paraboles de tous les genres.*

Si AP (x) eſt l'abſciſſe, & PM (y) l'ordonnée correſpondante, alors le raport qui eſt entre les abſciſſes & les ordonnées d'une parabole telle qu'elle ſoit, s'exprimera par cette équation generale $p^m x^n = y^q$; donc $p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n}{q}}=y$: ainſi l'element de l'aire ſera $ydx=p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n}{q}}dx$; & ſon integrale, *ſuivant le ſecond cas*, *ſection* 2, ſera $\frac{q}{n+q}p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n+q}{xq}}=\frac{q}{n+q}xy$; car $p^{\frac{m}{q}}x^{\frac{n}{q}}=y$. Donc tout paraboloïde eſt au rectangle formé par l'ordonnée & par l'abſciſſe, comme $\frac{qxy}{n+q}$ eſt à xy, ou, comme q eſt à $n+q$. Fig. 1.

EXEMPLE IV.

19. *Quarrer le ſegment de l'eſpace parabolique $PMNQ$, compris par les ordonnées PM, NQ, par la partie PQ de l'abſciſſe, & la partie MN de la courbe.*

On ſupoſe ici $AP=a$, invariable, P l'origine des quantités changeantes, $PQ=x$. De même $QN=y$, & le parametre $=p$; alors $AQ=a+x$, tirez nq, parallele & infiniment proche à NQ. Fig. 7.

Maintenant par la proprieté de la courbe $\overline{AP+PQ}\times p=\overline{NQ}^2$, $=pa+px=yy$, & $\sqrt{pa+px}=y$, donc QN

$\times\ Qq = ydx = dx\sqrt{pa + px} = 1x^0 \times \overline{pa + px}^{\frac{1}{2}}\,dx$, qui eſt l'élement de l'aire, dont on trouvera par la derniere maniere *du ſecond cas*, *ſection deuxiéme*, l'integrale ; mais on le fera plus aiſément ſi on ſupoſe $\sqrt{pa + px} = z$; car alors $pa + px = zz$, & $pdx = 2zdz$ & $dx = \frac{2zdz}{p}$; donc $ydx = \frac{2z^2dz}{p}$, & alors l'integrale ſera $\frac{2}{3}\frac{z^3}{p} = \frac{2}{3}\frac{\overline{pa + px} \times \sqrt{pa + px}}{p} = \frac{2}{3}\,\overline{a + x} \times \sqrt{pa + px} = \frac{2}{3}\,AQ \times NQ$.

Mais parce que dans le point P, $x = 0$, l'eſpace $PMNQ$, s'évanoüit ; ainſi, faiſant $x = 0$ dans l'integrale déja trouvée, les termes x & px, s'évanoüiront ; de façon que l'integrale ſera $\frac{2}{3}\,a\sqrt{pa}$, qui indique ce qu'on doit ajouter à l'integrale, afin que l'eſpace $MPNQ$, ſoit nulle ou 0, dans le point P, ce qui donnera la quadrature cherchée ; en ce cas $\frac{2}{3}\,a\sqrt{pa}$, doit être retranché ; ainſi l'aire de $MPNQ = \frac{2}{3}\,\overline{a + x}\sqrt{pa + px} - \frac{2}{3}\,a\sqrt{pa} = \frac{2}{3}\,AQ \times NQ - \frac{2}{3}\,AP \times PM$.

Autrement.

Tirez mp, infiniment proche de MP ; faites $AQ = a$, invariable ; que l'origine de x ſoit en Q, & que $QP = x$, $PM = y$, ce qui donnera $AP = a - x$.

Maintenant par la proprieté de la courbe $\overline{AQ - QP} \times p = \overline{PM}^2$; c'eſt-à-dire, $pa - px = yy$; ce qui donne $\sqrt{pa - px} = y$. Ainſi $MP \times Pp$, élement de l'aire, eſt $ydx = dx\sqrt{pa - px}$; dont on peut trouver l'integrale de cette façon : Faites $pa - px = zz$, vous aurez $-pdx = 2zdz$, & conſéquemment $dx = -\frac{2z^2dz}{a}$, & $ydx = -\frac{2z^2}{a}dz$, dont l'integrale eſt $-\frac{2z^3}{3a} = -\frac{2}{3}\frac{\overline{a - x} \times \sqrt{pa - px}}{a} = \frac{2}{3}\,\overline{x - a} \times \overline{pa - px}$.

Preſentement pour trouver ce qu'on doit ajoûter à l'integrale pour avoir la quadrature de l'eſpace $PMNQ$, faites comme auparavant $x = 0$ dans l'integrale, & vous aurez

$-\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$; d'où il est évident que si $+\frac{2}{3}a\sqrt{pa}$, est ajoûté à l'integrale, l'espace $PMNQ = \frac{2}{3}a\sqrt{pa} + \frac{2}{3}\overline{x-a} \times \overline{pa-px}$.

COROLLAIRE I.

20. L'espace $PMNQ = ANQ - AMP$; mais dans la premiére maniere $ANQ = \frac{2}{3}AQ \times QN = \frac{2}{3}\overline{a+x} \times \overline{pa+px}$; & $AMP = \frac{2}{3}AP \times PM = \frac{2}{3}a\sqrt{pa}$: donc $PMNQ = \frac{2}{3}AQ \times QN - \frac{2}{3}AP \times PM$.

Il faut observer que dans la derniere maniere $ANQ = \frac{2}{3}AQ \times QN = \frac{2}{3}a\sqrt{pa}$, & $AMP = \frac{2}{3}AP \times PM = \frac{2}{3}\overline{a-x} \times \sqrt{pa-px}$; donc $QNMP = \frac{2}{3}AQ \times QN - \frac{2}{3}AP \times PM$, comme nous avons trouvé auparavant.

COROLLAIRE II.

21. Si la courbe n'est point décrite, & que l'équation qui l'exprime soit seulement donnée, alors étant incertain de l'origine de x, il est évident, selon la solution précedente, qu'on doit substituer o pour x, dans l'integrale; ce qui effacera ou fera disparoître tous les termes affectés de x; alors ce qui restera doit s'ajoûter à l'integrale en changeant le signe, & le tout sera la quadrature requise.

EXEMPLE V.

22. *Quarrer une courbe exprimée par cette équation* $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Puisque $y = \frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a$, l'élement de l'aire sera $ydx = \overline{\frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a} \times dx$, & l'integrale sera $\frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{3a} + ax$.

EXEMPLE VI.

23. *Quarrer une courbe quelconque dont la nature est exprimée par cette équation,* $y=x\sqrt[m]{x+a}$.

Parce que $y=x\times\overline{x+a}^{\frac{1}{m}}$, il s'ensuit que l'élement de l'espace cherché est $ydx=xdx\times\overline{x+a}^{\frac{1}{m}}$, dont on trouvera facilement l'integrale, en faisant $\overline{x+a}^{\frac{1}{m}}=z$: car alors $x+a=z^{m}$, & differentiant chaque membre de cette équation, on aura $dx=mz^{m-1}dz$, d'où $ydx=mz^{m}dz$ & l'integrale $=\frac{mz^{m+1}}{m+1}=\frac{m}{m+1}\overline{x+a}\times\sqrt[m]{x+a}$.

Maintenant pour sçavoir si c'est la même integrale, je supose $x=0$, alors cette derniere expression est $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$, qui, *suivant le second corollaire*, *exemple second*, doit être retranchée de l'integrale ; de maniere que la veritable integrale ou quadrature sera $\frac{m}{m+1}\overline{x+a}\times\sqrt[m]{x+a}-\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$.

EXEMPLE VII.

Fig. 8. 24. *Quarrer les hyperboles de tous les degrés par raport à leurs asymptotes ; ou, ce qui est la même chose, trouver l'aire de l'espace indéterminé HMPAS ou hMPs ; le premier contenu sous l'abscisse AP, l'ordonnée PM, l'asymptote AS, & la partie MH, de la courbe hyperbolique ; & le dernier sous l'ordonnée PM, la partie restante Ps de l'asymptote, & sous la partie Mh de la courbe hyperbolique.*

Le raport qui est entre les *AP* (x) & les *PM* (y), s'exprime en general dans ces courbes par l'équation suivante $a^{m+n}=y^{m}x^{n}$.

D'où on tire $a^{m+n}x^{-m} = y^m$, & $a^{\frac{m+n}{n}} x^{-\frac{n}{m}} = y$; donc $PM \times Pp = ydx = a^{\frac{m+n}{n}} x^{-\frac{n}{m}} dx$, dont l'integrale est $\left(\frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n+m}{m}} = \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{a^{m+n} x^{m+n}} = \frac{m}{m-n}\sqrt[m]{y^m x^n}\right) = \frac{m}{m-n} xy$.

Si m eſt plus grand que n, alors la quadrature de l'eſpace indeterminée $HMPAS$ eſt toujours $= \frac{m}{m-n} AP \times PM$: mais ſi m eſt moindre que n; alors $\frac{m}{m-n} xy$, eſt une quantité négative qui donne la quadrature de l'eſpace indéterminée $hMPs$ du côté oppoſé à l'ordonnée PM : mais quand $m=n$; alors aucun des deux eſpaces ne peuvent ſe quarrer, puiſque dans ce cas l'un & l'autre ſont infinis; car ſi $xy^2 = a^3$, ce qui fait $m=2$, $n=1$, & ainſi $HMPAS = \sqrt{a^3x} = (\sqrt{x^2y^2}) = xy$. Si $xy^4 = a^5$; par conſéquent vous aurez $m=4$, $n=1$; ainſi $HMPAS = \frac{4}{3} xy$. Si $x^2y = a^5$, alors $m=1$, $n=2$; en ce cas $-xy$ ſera la quadrature de l'eſpace $hMPs$; ſi $x^4y = a^5$, ce qui donne $m=1$, $n=4$, & par conſéquent $-\frac{1}{3} xy$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{3} xy = hMPs$; mais quand $m=n$, alors $\frac{m}{m-n} = \frac{1}{0}$; ainſi le numerateur eſt infini par raport au dénominateur.

EXEMPLE VIII.

25. *Quarrer l'hyperbole ordinaire avec ſes aſymptotes, ou, ce qui eſt la même choſe, trouver l'aire ou l'eſpace CcMP, compris par les ordonnées Cc, PM, la partie CP, de l'aſymptote & par la partie cM de la courbe hyperbolique.* Fig. 8.

Soit la quantité donnée $AC=b$ & ſoit C l'origine de x. L'équation qui exprimera le raport de AP $(b+x)$ à PM

(y) sera $a^2 = by + xy$; ainsi $\frac{a^2}{b+x} = y$ & ydx élement de l'aire, sera $\frac{a^2}{b+x}\,dx$.

Maintenant, *suivant le troisiéme cas*, *section premiere*; son integrale sera $\frac{a^2}{b}x - \frac{a^2}{2b^2}x^2 + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} +$, &c. $=$ à l'aire $CcMP$; & si vous supposez $a = b = 1$, alors $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. $=$ à l'aire dont on a déja parlé.

Autrement.

Par la mesure d'un raport ou d'un angle.

La differentielle $\frac{a^2}{b+x}\,dx$, peut se raporter à la premiere forme dans les Tables de M. *Cottes* ; car faisant $z = x$, $n = 1$, $\theta = 1$, $D = a^2$, $e = b$, $f = 1$, on aura $\frac{Dz^{\theta n - 1}}{e + fz^n}\,dz = \frac{a^2}{b+x}\,dx$, & l'integrale qui répond à $\theta = 1$, est $\frac{D}{nf}\left|\frac{e+fz^n}{e}\right. = a^2 \left|\frac{b+x}{b}\right. = \overline{AC}^2\left|\frac{AP}{AC}\right.$ égale à la mesure du raport de AP & AC, à $\overline{AC}^2$, comme au module que vous trouverez, *article 9*, égal à l'aire de l'espace $CcMP$; & si l'asymptote AS n'est point perpendiculaire à As, & que l'ordonnée PM, qui lui est parallele, ne soit point perpendiculaire à l'abscisse AP, la mesure du raport de AP à PM, avec le parallelograme ACc, comme module, donnera l'aire de l'espace $CcMP$,

Ceci est démontré par synthese, *page 12*, *partie premiere de harmonia mensurarum.*



EXEMPLE IX.

26. *Trouver l'aire ou espace ACMP, contenu par la partie AP (x) d'une ligne droite infinie & perpendiculaire à l'axe de l'hyperbole, par la ligne AC, (a) continuation du même axe, & par une ligne quelconque ou ordonnée PM (y) parallele à AC.*

Ici $aa+xx=yy$; donc $y=\sqrt{aa+xx}$ & $ydx=dx\sqrt{aa+xx}$, differentielle dont, *suivant le troisiéme cas, section premiere*, l'integrale $=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. $=$ à l'aire $ACMP$ cherchée, qui donne la quadrature du segment hyperbolique DCM, en le soustrayant du rectangle $ADMP$ (ydx); & si $a=1$; alors la serie est $x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\frac{x^7}{112}-\frac{5x^9}{1132}$, &c. Fig. 9.

Autrement.

Par la mesure d'un raport ou d'un angle.

La differentielle $dx\sqrt{aa+xx}$ se raporte à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*: Car si $z=x$, $n=2$, $\theta=0$, $D=1$, $e=aa$, $f=1$, vous aurez $Dz^{(n+\frac{1}{2}n-1)}dz\sqrt{e+fz^n}=dx\sqrt{aa+xxdx}$, dont l'integrale est $\frac{z^n}{n}DP+\frac{e}{nf}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$; & faisant $P\left(=\frac{\sqrt{e+fz^n}}{z^n}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{aa+xx}$, $R\left(=\sqrt{f}\right)=1$, $T\left(=\frac{\sqrt{e+fz^n}}{z^n}\right)=\frac{1}{x}\sqrt{aa+xx}$, $S\left(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}\right)=\frac{a}{x}$. Alors l'integrale deviendra $\frac{x}{2}\sqrt{aa+xx}+\frac{aa}{2}\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.=\frac{1}{2}AP\times PC+\frac{1}{2}\overline{AC}^2\left|\frac{AP+PC}{AC}\right.=$, à l'aire $ACPM$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}AP\times PC$ plus la mesure du raport de $AP+PC$, & de AC à $\frac{1}{2}AC$, comme module, sera l'aire.

La quadrature de l'espace hyperbolique AMP peut se trouver comme M. *Cottes* le dit dans son *harmonia mensurarum* de cette façon.

Fig. 10. Faites le demi-diametre conjugué $CB=b$, le demi-transversale $CA=a$, $CP=x$, $PM=y$; ensuite par la proprieté de la courbe on a $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}=y$, ainsi $\frac{b}{a}dx\sqrt{xx-aa}$, $=$ à l'élement de l'espace AMP.

Maintenant faisant $D=\frac{b}{a}$, $z=x$, $\theta=0$, $\eta=2$, $e=-aa$, $f=1$, la differentielle de la quatriéme forme dans les Tables de M. *Cottes*, *par exemple*, $Dz^{\theta\eta+\frac{1}{2}\eta-1}dz\sqrt{e+fz^{\eta}}$ deviendra $\frac{b}{a}dx\sqrt{xx-aa}$, & son integrale qui répond à $\theta=0$, donnera $\frac{z^{\eta}}{\eta}DP+\frac{e}{\eta f}DR\,\Big|\,\frac{R+T}{S}$, & faisant P ($=\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{z^{\eta}}}$) $=\frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, R ($=f$) $=1$, T ($=\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{z^{\eta}}}$) $=\frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, S ($=\sqrt{\frac{e}{z^{\eta}}}$) $=\frac{a}{x}$; cette integrale viendra, $\frac{bx}{2a}\sqrt{xx-aa}-\frac{ab}{2}\,\Big|\,\frac{x+\sqrt{xx-aa}}{a}=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\,\Big|\,\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}$, en substituant pour y sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}$. Et *par l'article quatorziéme*, quand le raport de $x+\sqrt{xx-aa}$ à a, est égal au raport de a, à $x-\sqrt{xx-aa}=$ à $x-\frac{ay}{b}$; c'est pourquoi $\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\,\Big|\,\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}$, est l'integrale de la differentielle $\frac{b}{a}dx\sqrt{xx-aa}$ qu'on peut construire ainsi.

Faites $CF : CA$ (a) $::$ PM (y) $: CB$ (b); c'est-à-dire, faites $CF=\frac{ay}{b}$: faites ensuite $CG : CA$ (a) $::$ CB (b)$:PM$ (y), c'est-à-dire, $CG=\frac{ab}{y}$; ensuite si CH, est pris égal au raport de CA (a) & FP ($=x-\frac{ay}{b}$) au module $\frac{ab}{y}$, c'est-à-dire, si on prend $CH=\frac{ab}{y}\,\Big|\,\frac{a}{x-\frac{ab}{y}}$, & tirant la ligne droite MH, le triangle rectiligne HMP est égal à l'espace AMP. Car il est $=\frac{y}{2}\times x-\frac{ab}{y}\,\Big|\,\frac{a}{x-\frac{ab}{y}}=\frac{yx}{2}-\frac{ab}{2}\,\Big|\,\frac{a}{x-\frac{ab}{y}}$: ainsi pour trou-

ver

ver la quadrature de l'espace hyperbolique exterieure $CAMP$, de la même maniere, il faut s'y prendre ainsi. *Fig.* 11.

Que AC, CB, soient les deux demi-diametres conjugués $AC = a$, $CB = b$, $PM = x$, $CP = y$; ce qui donne $\frac{b}{a}\sqrt{xx - aa} = y$, par la proprieté de la courbe.

Differentiant cette équation, vous aurez $\frac{bbx}{aay}dx = dy = \frac{bbx}{ab\sqrt{xx-aa}}dx = \frac{bx}{a\sqrt{xx-aa}}dx$; mais $dy \times x = \frac{bxx}{a\sqrt{xx-aa}}dx$ = à l'élement de l'espace hyperbolique $CAMP$.

Maintenant faisant $D = \frac{b}{a}$, $z = x$, $n = 2$, $\theta = 1$, $e = -aa$, $f = 1$; la differentielle $\frac{Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{\sqrt{e + fz^n}}dz$ de la sixiéme forme dans les tables, deviendra $\frac{bx^2}{a\sqrt{xx-aa}}dx$, dont l'integrale θ étant $= 1$, donne $\frac{z^n}{nf}DP - \frac{e}{nff}DR\Big|\frac{R+T}{S}$: d'où faisant $P\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, $R\left(=\sqrt{f}\right) = 1$, $T\left(=\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{x}\sqrt{xx-aa}$, $S\left(=\sqrt{\frac{e}{z^n}}\right) = \frac{a}{x}$; ladite integrale sera $\frac{bx}{2a}\sqrt{xx-aa} - \frac{ab}{2}\Big|\frac{x+\sqrt{xx-aa}}{a} = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\Big|\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}$, (substituant y pour $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}$, *art.* 14.) = à l'integrale de la differentielle $\frac{bx^2}{a\sqrt{xx-aa}}dx$ qu'on peut construire de cette maniere.

Prenez $CF : CB\ (b) :: PM\ (x) : AC\ (a)$; c'est-à-dire, faites $CF = \frac{bx}{a}$; & $CG : CB\ (b) :: AC\ (a) : PM\ (x)$; ou ce qui est le même $CG = \frac{ba}{x}$; ensuite si vous prenez CH égal à la mesure du raport de $BC\ (b)$ & $PF\ (\frac{bx}{a} - y)$, (égal au raport de a, à $x - \frac{ay}{b}$), au module $CG\ (\frac{ba}{x})$: le même CH sera $= \frac{ba}{x}\Big|\frac{a}{x-\frac{ay}{b}}$, & si vous tirez la ligne droite MH, le

triangle rectiligne est égal à l'espace *CAMP* : car il est $= \frac{x}{2} \times y + \frac{bs}{x} \left| \frac{a}{x - \frac{ay}{b}} \right. = \frac{xy}{2} + \frac{ba}{2} \left| \frac{a}{x - \frac{ay}{b}} \right.$, integrale de la differentielle donnée.

Exemple X.

27. *Quarrer le cercle ; ou , ce qui est la même chose , trouver l'aire d'un demi segment quelconque APM , de ce cercle.*

Fig. 12. Que $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$. Par la proprieté du cercle $AP \times PB = \overline{PM}^2$; c'est-à-dire , $x - xx = yy$; donc $y = \sqrt{x - xx}$ & $ydx = dx\sqrt{x - xx} = PM \times Pp$, égal à l'élement de l'aire *APM* ; dont , *par le troisiéme cas , section premiere*, l'integrale sera $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$, *&c.* $=$ à l'aire *AMP* , ou bien $x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{5} x^2 - \frac{1}{28} x^3 - \frac{1}{72} x^4$, *&c.*

Autrement.

Si le rayon $CM = a$, & qu'on supose $CP = x$, $PM = y$; par la proprieté du cercle $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$; c'est-à-dire , $aa = xx + yy$, $yy = aa - xx$, & $y = \sqrt{aa - xx}$; donc $ydx = dx\sqrt{aa - xx}$, qui sera l'élement de l'espace indeterminé *PMDC* , dont l'integrale $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ *&c.* est $=$ à l'aire *PMDC*.

Maintenant si on supose $a = 1 = x$, alors cette serie deviendra $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$, *&c.* $=$ à l'aire du quart du cercle *ADC* ; & en le quadruplant vous aurez la quadrature de tout le cercle entier *ADBA* ; ou si le diametre est 1 , la même serie exprimera l'aire de tout le cercle.

Autrement.

Que AE, tangente de la moitié de l'arc AM, soit $=x$ le rayon $AC=1$: que AB, soit la tangente de l'arc AM. Tirez les secantes CE, CB, & le sinus MP de l'arc AM: que pm, soit infiniment proche de PM, & du centre C, tirez la secante Cb par le point m; & du point M, tirez aussi la perpendiculaire Mt à pm, & tirez du point B perpendiculaire à Cb, la ligne Bs. Fig. 13.

Comme on propose ici de trouver l'aire du secteur indéfini ACM, dont l'élement qui est le petit secteur MCm, doit premierement être trouvé de la maniere suivante :

Premierement, la tangente AB de l'arc BM, sera $\frac{2x}{1-xx}$; alors parce que l'angle ACB, est partagé en deux également par la ligne CE, on aura $AE\ (x) : AC\ (1) :: EB\ (\frac{x+x^3}{1-xx}) : CB = \frac{1+x^2}{1+x^2}$. De même, à cause des triangles semblables, ACB, PCM; $CB\ (\frac{1+x^2}{1-x^2} : AB\ (\frac{2x}{1-x^2}) :: AC\ (1) : PM = \frac{2x}{1+x^2}$, & $CB\ (\frac{1+x^2}{1-x^2}) : AC\ (1) :: CM\ (1) : CP = \frac{1-x^2}{1-x^2}$, d'où on tire $AP = \frac{2x^2}{1+x^2}$; dont la differentielle est $\frac{4xdx}{\overline{1+xx}^2} = Pp$, ou Mt.

De plus le petit triangle Mmt, rectangle en t, est semblable au triangle rectangle CMP, l'angle tMm étant égal à l'angle PMC, & l'angle tmM égal à l'angle PCM, comme il est facile de le prouver. Ainsi $MP\ (\frac{2x}{1+xx}) : AC\ (1) :: Mt\ (\frac{4xdx}{\overline{1+xx}^2}) : Mm = \frac{2dx}{1+xx}$. Ainsi $\frac{1}{2}\ MC\ (1) \times Mm = \frac{dx}{1+xx}$ = à l'aire du petit secteur MCm, étant l'élement du secteur AMC dont l'integrale sera $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9$, &c. = à l'airedu secteur indeterminé AMC.

Quand la tangente $AE\ (x)$ de la moitié de l'arc AM, devient $=1=$ au rayon, alors le secteur ACM deviendra un quart de cercle ; & la serie précedente qui en exprimoit

l'aire, fera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}$, *&c.* & quand le diametre du cercle $=1$, l'aire entier du cercle fera exprimé par cette ferie.

On trouve plus briévement cette même ferie de la maniere fuivante.

Si $AB = x$, alors $Bb = dx$, & $CB = \sqrt{1+xx}$. Or le petit triangle BSb, droit en S, eft femblable au triangle ABC, l'angle ABC ne differant de l'angle b, que d'un infiniment petit feulement ; ainfi ils font cenfés égaux ; donc CB $(\sqrt{1+xx}) : AC\,(1) :: Bb\,(dx) : Bs = \frac{dx}{\sqrt{1+xx}}$: De plus, parce que Bs eft infiniment petit, CB & Cs, ne different entr'eux que d'un infiniment petit feulement ; ainfi CB $(\sqrt{1+xx}) : Bs\,(\frac{dx}{\sqrt{1+xx}}) :: MC\,(1) : Mm = \frac{dx}{1+xx}$; d'où l'on tire le petit fecteur $MCm = \frac{dx}{2+2xx} =$ à l'élement de l'aire du fecteur AMC ; dont l'integrale eft $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9$, *&c.* $=$ à l'aire dudit fecteur ; de maniere que quand le fecteur ACM, eft la huitiéme partie du cercle ; par exemple, quand la tangente AB, (x) eft $=$ au rayon $AC = 1$; alors la même ferie fera $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18}$, *&c.* qui étant doublée donnera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, *&c.* $=$ à l'aire du quart du cercle, comme ci-devant.

EXEMPLE XI.

28. *Quarrer l'efpace éliptique ; ou, ce qui eft la même chofe, trouver l'aire d'un fegment éliptique indéterminé ACMP, compris par le demi-diametre conjugué AC, l'ordonnée PM, la partie de l'abfciffe AP, & la partie de l'élipfe CM.*

Fig. 14. Nommez AC, a, AB, ou AD, b, AP, x, PM, y ; enfuite par la proprieté de l'élipfe on aura $\overline{MP}^2 = \overline{AD}^2 \times$

$\overline{AB}^2 - \overline{AP}^2$, ou ce qui est la même chose, $yy = \frac{bb \times \overline{aa-xx}}{aa}$; donc $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$. Par conséquent $\frac{b}{a}dx\sqrt{aa-xx}$ sera l'élement de l'espace *ACPM*, & son integrale sera $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6}$, &c. = à l'aire *ACPM*.

Maintenant si vous substituez a pour x dans cette serie, vous aurez $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab$, &c. = à l'aire du quart *ACD* de l'élipse; & si *A* est = à l'axe *BD*, alors cette derniere serie exprimera l'aire de toute l'élipse, & si $\sqrt{ab} = 1$, on aura pour l'aire de l'élipse $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$, &c. Ainsi une élipse est égale à un cercle dont le diametre est moyen proportionnel entre ses deux diametres conjugués. Donc une élipse est à un cercle, ayant pour diametre le grand axe de l'élipse, comme ab à a^2, ou comme b à a, par exemple, comme le petit axe est au grand.

Autrement.

29. *Trouver l'aire d'un secteur quelconque CAM, d'une élipse.*

Que *CB* soit le demi-diametre conjugué, & *CA* la moitié de son grand diametre, *MP*, une demi-ordonnée: *Fig. 15.*

Maintenant tirez *mp* infiniment proche de *MP*, joignez les points *C*, *M* & *m*, par les lignes droites *CM*, *Cm*; & de *m*, tirez la petite ligne *mH*, perpendiculaire à *MP*, coupant *MP* en *I*, *CM* en *H*, & la petite ligne *mK*, perpendiculaire à la ligne *CM* prolongée.

Cela fait que $AC = a$, $BC = 1$, $AP = x$, *PM* (y) *CM* $= u$ & $CP = z$.

Or la premiere chose qu'il faut trouver est l'aire du petit triangle *CMm*. Parce que les triangles *CPM*, *HIM*, sont semblables; on aura *PM* (y) : *CP* (z) :: *MI* (dy) : $IH = \frac{zdy}{y}$; d'où on tire (à cause que $Pp = Im = dx = -dz$) $Hm = \frac{zdy}{y} - dz$. De plus, à cause des triangles semblables *CMP*, *HKM*; *CM* (u) : *PM* (y) :: *Hm* $(\frac{zdy}{y} - dz)$:

$mK = \frac{zdy - ydz}{u}$, qui multiplié par la moitié de la base CM (u) ; alors l'aire du triangle differenticlle CMm, sera $= \frac{zdy - ydz}{2}$; & prenant la difference de l'équation de la courbe $\frac{aa - zz}{aa} = yy$, on aura $- \frac{dz}{aay} = dy$. Substituant cette valeur de dy dans $\frac{zdy - ydz}{2}$, on aura $\frac{-zzdz}{2aay} - \frac{ydz}{2} = \frac{-zzdz - aayydz}{2aay}$, & substituant dans cette derniere expression pour $aayy$, sa valeur $aa - zz$, il viendra $- \frac{zzdz - aadz + zzdz}{2aay} = \frac{-adz}{2ay} = \frac{adx}{2ay}$; puisque $dx = -dz$: de plus substituant

Fig. 16. $\sqrt{2ax - xx}$ pour ay ; le triangle CMm sera $= \frac{adx}{2\sqrt{2ax - xx}}$ $=$ à l'élement du secteur ACM, de l'élipse. Et si vous faites $\sqrt{2ax - xx} = \frac{n}{x}$; alors $x = \frac{2ann}{1 + nn}$, & $dx = \frac{4andn}{\overline{1 + nn}^2}$, & toutes substitutions faites on trouvera $\frac{adx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \frac{adn}{1 + n.dn}$, dont l'integrale est $an - \frac{an^3}{3} + \frac{an^5}{5} - \frac{an^7}{7}$, &c. $=$ au secteur de l'élipse.

Vous trouverez de la même maniere que le secteur de l'hyperbole, (*figure* 16,) est $an + \frac{an^3}{3} + \frac{an^5}{5} + \frac{an^7}{7}$, &c. & le secteur du cercle sera $= n - \frac{n^3}{3} + \frac{n^5}{5} - \frac{n^7}{7}$, &c. qui devient $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. faisant $n = 1$.

On peut résoudre ceci plus briévement de la maniere suivante.

Fig. 17. 18. Tirez la tangente AD, & continuez CM jusqu'à ce qu'elle coupe la même en D : tirez Cd, infiniment proche de CD, de C, décrivez les petits arcs Mn, De ; faites $CB = b$, $CA = a$, $AD = x$, $CD = y$, $CP = z$, à cause de la similitude des triangles CAD, Ded ; l'angle A differant seulement de l'angle D d'un infiniment petit, qu'on peut par conséquent négliger, & les angles en e, & en A, étant droits ; on aura CD (y) : AC (a) :: Dd (dx : $DE = \frac{adx}{y}$; & par la simili-

tude des triangles CPM, CAD; AC (a) : CD (y) : : CP (z) : $CM = \frac{yz}{a}$, par la même raison les secteurs CDe, CMn, étant semblables, CD (y) : De $(\frac{adx}{y})$: : CM $(\frac{yz}{a})$: $Mn = \frac{zdx}{y}$: or $\frac{1}{2}$ $CM \times Mn$; c'est-à-dire, $\frac{zdx}{2y} \times \frac{yz}{a} = \frac{zzdx}{2a} =$ à l'aire du triangle CMm, étant l'élement du secteur CAM.

De plus, par la nature de la courbe & la similitude des triangles CPM, CAD, dans l'élipse, on aura PM $(\frac{b}{a}\sqrt{aa-zz})$: CP (z) : : AD (x) : AC (a); & dans l'hyperbole PM $(\frac{b}{a}\sqrt{-aa+zz})$: CP (z) : : AD (x) : AC (a), & multipliant les moyens & les extrêmes, on aura $zx = b\sqrt{aa+zz}$, dans l'élipse, & $zx = b\sqrt{-aa+zz}$ dans l'hyperbole; par consequent $zz = \frac{aabb}{bb+xx}$ dans l'élipse, & $zz = \frac{aabb}{bb-xx}$ dans l'hyperbole, qui étant substitué dans $\frac{zzdx}{2a}$, donnera $\frac{abbdx}{2bb+2xx}$ dans l'élipse, & $\frac{abbdx}{2bb-2xx}$ dans l'hyperbole $=$ à l'élement de l'aire du secteur CAM, dont l'integrale sera $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb} + \frac{ax^5}{10b^4} - \frac{ax^7}{14b^6}$, *&c.* dans l'élipse, & $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb} - \frac{ax^5}{10b^4} - \frac{ax^7}{14b^6}$, *&c.* dans l'hyperbole $=$ à l'aire du secteur CAM; & faisant CB $(b) = 1$, la même integrale se changera en celle-ci $\frac{1}{2}ax - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{10}ax^5 - \frac{1}{14}ax^7$, *&c.* dans l'élipse, & $\frac{1}{2}ax - \frac{1}{6}ax^3 - \frac{1}{10}ax^5 - \frac{1}{14}ax^7$, *&c.* dans l'hyperbole. Dans l'élipse si $x = b$, l'aire du secteur CAM, sera $\frac{1}{2}ab - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{10}ab - \frac{1}{14}ab$, *&c.* & quand $x = a$, l'aire du secteur CBM, sera de même $= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{10}ab - \frac{1}{14}ab$ *&c.* dont la somme, *par exemple*, $ab - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{5}ab - \frac{1}{7}ab$, *&c.* sera l'aire du quart de l'élipse ABC.

COROLLAIRE.

Il ſuit que ſi $a = b$, *par exemple*, quand l'élipſe eſt à un cercle ; l'aire de ce quart de cercle, dont le rayon eſt a, ſera $aa - \frac{1}{3} aa + \frac{1}{5} aa - \frac{1}{7} aa$, *&c.* & ſi $a = 1$, l'aire de ce quart de cercle ſera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$, *&c.*

On peut trouver l'integrale de l'élement $\frac{abbdx}{2bb - 2xx}$ du ſecteur hyperbolique en la meſure d'un raport, en la raportant à la ſeconde forme dans les Tables de M. *Cottes ;* car faiſant $z = x$, $D = abb$, $\theta = 0$, $n = 2$, $e = 2bb$, $f = -2$, la differentielle dans la ſeconde forme $\frac{Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{e + zf^{n}} dz = \frac{abbdx}{2bb - 2xx}$, & ſon integrale répondant dans les Tables à $\theta = 0$, eſt $\frac{2}{ne} DR \left| \frac{R + T}{S} \right.$. Or $R \left(= \sqrt{\frac{-e}{f}}\right) = b$, $T \left(= z^{\frac{1}{2}n}\right) = x$, & $S \left(= \sqrt{\frac{e + fz^{n}}{f}}\right) = \sqrt{bb - xx}$, d'où $\frac{2}{ne} DR \left| \frac{R + T}{S} \right. = \frac{1}{2} ab \left| \frac{b + x}{\sqrt{bb - xx}} \right. = \frac{1}{2} AC \times CB \left| \frac{CB + AD}{\sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AD}^2}} \right.$; c'eſt-à-dire que l'aire du ſecteur hyperbolique CAM, eſt égal à la meſure du raport de $CB + AD$, à $\sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AD}^2}$ le triangle ACB en étant le module.

EXEMPLE XI.

30. *Quarrer l'eſpace AMp, apellé la figure des tangentes.*

La proprieté de cette figure eſt telle, qu'une abſciſſe quelconque AP, eſt égale à un arc quelconque (AP) d'un cercle, & l'ordonnée correſpondante PM, qui la coupe à angles droits, eſt égal à la tangente correſpondante AT de cet arc.

Fig. 19. 20. Tirez la ſecante CT, & la ſecante Ct infiniment proche de la premiere ; & de C, comme centre, & de l'intervale CT,

CT, décrivez le petit arc *Tc*. Faites le rayon $AC = a$, l'arc AP (= à l'abſciſſe AP) $= x$, & la tangente correſpondante AT (= à l'ordonnée correſpondante pM) $= y$. Maintenant à cauſe que les triangles *ATC*, *Ttc*, ſont ſemblables, les angles T, t, ne differant entr'eux que d'un angle infiniment petit ſeulement, & les angles en A & en C, étant droits; on aura $TC\ (\sqrt{aa+yy}) : AC\ (a) :: Tt\ (dy) : Tc = \frac{ady}{\sqrt{aa+yy}}$. De plus, à cauſe des triangles ſemblables *CPp*, *CTc*, on aura $CT\ (\sqrt{aa+yy}) : Tc\ (\frac{ady}{\sqrt{aa+yy}}) :: CP\ (a) : Pp\ (= dx)$: multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $dx\sqrt{aa+yy} = \frac{aady}{\sqrt{aa+yy}}$; & diviſant par $\sqrt{aa+yy}$, on aura $dx = \frac{aady}{aa+yy}$ = à la differentielle de l'abſciſſe Ap; & multipliant par y, on aura $ydx = \frac{aaydy}{aa+yy}$ = à l'élement de l'eſpace AMp; dont l'integrale ſera $yy - \frac{y^4}{4aa} + \frac{y^6}{6a^4} - \frac{y^8}{8a^6} + \&c.$ = à l'aire cherchée.

Autrement.

Par la meſure d'un raport.

La differentielle $\frac{aaydy}{aa+yy}$ peut être comparée à la premiere forme des Tables de M. *Cottes*: car ſi $z = y$, $n = 2$, $\theta = 1$, $D = aa$, $e = aa$, $f = 1$; la premiere forme qui eſt $\frac{Dz^{\theta n - 1}}{e+fz^n}dz$ ſera $= \frac{aaydy}{aa+yy}$ & l'integrale, répondant à $\theta = 1$, ſera $\frac{D}{nf}\left|\frac{e+fz^n}{e}\right.$ $= \frac{1}{2}aa\left|\frac{aa+yy}{aa}\right. = \frac{1}{2}\overline{AC}^2\left|\frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}\right.$, qui eſt égal à $\overline{AC}^2\left|\frac{CT}{AC}\right.$. Car mettant $2l$ pour le logarithme du raport de $\frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}$, & m, pour le module des logarithmes; on aura $\frac{1}{2}\overline{AC}^2\left|\frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}\right.$ (*) $= \frac{1}{2}\overline{AC}^2 \times \frac{2l}{m} = \overline{AC}^2 \times \frac{l}{m}$. Mais par la nature * art. 11.

des logarithmes, l eſt égale au logarithme du raport $\frac{CT}{AC}$;

* art. 11. ainſi $\overline{AC}^2 \times \frac{l}{m}$ eſt (*) $= \overline{AC}^2 \Big| \frac{CT}{AC} = \frac{1}{2} \overline{AC}^2 \Big| \frac{\overline{CT}^2}{\overline{AC}^2}$: c'eſt pourquoi l'aire ApM, eſt égal à la meſure du raport de la ſecante CT, de l'arc $AP = Ap$, au rayon AC, ayant le quarré du rayon pour module.

EXEMPLE XIII.

31. *Quarrer l'eſpace ABpM, apellé la figure des ſecantes.*

Fig. 21. On fait ici l'abſciſſe Ap, égale à l'arc AP, comme dans l'exemple précedent ; mais l'ordonnée correſpondante pM, eſt égale à la ſecante CT, & l'ordonnée $AB =$ au rayon AC, tout le reſte étant de même que dans l'exemple précedent, ſeulement que CT ſoit $= y$. Enſuite par la ſimilitude des triangles ACT, Ttc, on aura AT ($\sqrt{yy - aa}$) : AC (a) : : tc (dy) : $Tc = \frac{ady}{\sqrt{yy - aa}}$; & à cauſe des ſecteurs ſemblables CTc, CPp, on aura CT (y) : Tc ($\frac{ady}{\sqrt{yy - aa}}$) : : CP (a) : Pp (dx), & multipliant les extrêmes & les moyens, il viendra $ydx = \frac{aady}{\sqrt{yy - aa}} =$ à l'élement de l'eſpace $ABMp$; & ſon integrale ſe trouvera facilement par la meſure du raport, pouvant être réduite à la ſixiéme forme des Tables de M. *Cottes* ; car faiſant $z = y$, $n = 2$, $\theta = o$, $D = aa$, $e = -aa$, $f = 1$, on aura $\frac{Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}}{\sqrt{e + fz^n}} dz = \frac{aady}{\sqrt{-aa + yy}}$. De même dans cette forme $R (= \sqrt{f}) = 1$, $T (= \frac{fz^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{e + fz^n}}) = \frac{y}{\sqrt{-aa + yy}}$, & $S (= \sqrt{\frac{-ef}{e + fz^n}}) = \frac{a}{\sqrt{-aa + yy}}$; d'où l'integrale (θ étant $= o$) $\frac{nf}{2} DR \Big| \frac{R + T}{S}$, ſera $aa \Big| \frac{y + \sqrt{-aa + yy}}{a} = \overline{AC}^2 \Big| \frac{CT + AT}{AC}$.

Par conſéquent l'aire de l'eſpace $ABMp$, eſt égale à la meſure du raport de la ſomme de la tangente & ſecante du même arc, & du rayon au quarré du rayon comme module.

COROLLAIRE.

On peut calculer par ce moyen dans les Cartes de *Mercator*, les parties méridionales pour une latitude donnée quelconque AP. Il eſt bien démontré, (*) que les parties méridionales d'une latitude quelconque AP, ſont à la longueur de l'arc AP, comme la ſomme des ſecantes de ces parties méridionales, eſt à la ſomme d'autant de demi-diametres; c'eſt-à-dire, comme l'eſpace curviligne $ABMp$, eſt au rectangle de $BA \times pA$; ou comme $\overline{AC}^2 \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$ eſt à $AC \times AP$; ou, comme $AC \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$, eſt à AP. D'où il ſuit que les parties méridionales ſont égales à $AC \left| \frac{CT+AT}{AC} \right.$ (*), ou $AC \left| \frac{AC}{CT-AT} \right.$.

* V. les Tranſact. Philoſoph. de Londres, n° 176.

* art. 14.

EXEMPLE XIV.

32. *Trouver l'aire de l'eſpace $CPQc$, contenu ſous les parties des conchoïdes de Nicomede CPD, cqd, la partie Cc, de la ligne droite AC tirée du pole A, perpendiculaire à l'aſymptote commune BG, & la partie QP d'une ligne droite quelconque tirée du même pole A, compriſe entre les deux courbes.*

Fig. 22.

Que $Ac = a$, $cB = CB = b$, $cC = 2b$, $AB = c$, $AG = y$, $BG = x$. Tirez Ap infiniment proche de AP; & de A, comme centre, décrivez les petits arcs concentriques qs, mr, pn. Maintenant par la proprieté de ces courbes BC, ou Bc, $= GP$, (pm) ou GQ (mq): parce que les triangles AGB, rGm, ſont ſemblables, l'angle en G étant commun, & les angles en r & en B étant droits, (l'arc rm, pouvant être pris pour une ligne droite) on aura $AG\,(y) : AB\,(c) :: GM\,(dx) : rm = \frac{cdx}{y}$. De plus, à cauſe des ſecteurs ſemblables

Arm, Asq, on aura $Am = AG$ (y) : rm ($\frac{cdx}{y}$) : : $Aq = AQ$, $= AG - AQ$ ($y - b$) : $sq = \frac{cydx - cbdx}{yy}$, & de même les ſecteurs ſemblables Arm, Anp; donneront AG (y) : rm ($\frac{cdx}{y}$) : : AP ($y + b$) : $pn = \frac{cydx + cbdx}{yy}$; par conſéquent $pn + qs = \frac{2cdx}{y}$; ainſi $\frac{1}{2}\overline{pn + qs} \times PQ = \frac{2cbdx}{y}$ = à l'aire du petit eſpace $sPpq$, = à l'eſpace $QPpq$ = à l'élement de l'eſpace $CPQc$: & ſubſtituant $\sqrt{cc + xx}$ pour y, la differentielle ſera $\frac{2cbdx}{\sqrt{cc + xx}}$, qui convient à la ſixiéme forme des Tables de M. *Cottes* : car faiſant $D = 2cb$, $z = x$, $\theta = 0$, $\eta = 2$, $e = cc$, $f = 1$, ladite ſixiéme forme $\frac{Dz^{(\theta + \frac{1}{2})\eta - 1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} dz$, deviendra $\frac{2cbdx}{\sqrt{cc + xx}}$, dont l'integrale ($\theta$ étant $= 0$) ſera $\frac{2}{\eta f} DR \left| \frac{R + T}{S} \right.$: & faiſant R ($= \sqrt{f}$) $= 1$, T ($= \sqrt{\frac{e + fz^{\eta}}{z^{\eta}}}$) $= \frac{1}{x}\sqrt{cc + xx}$, & S ($= \sqrt{\frac{e}{z^{\eta}}}$) $= \frac{c}{x}$, la même integrale deviendra $2bc \left| \frac{x + \sqrt{cc + xx}}{c} \right.$ = à l'integrale de la differentielle donnée égale à l'aire de l'eſpace $CPQc = Bc \times AB \left| \frac{BG + AG}{AB} \right.$, c'eſt-à-dire, que l'aire dudit eſpace eſt égale au rectangle de Bc, & de la meſure du raport de $BG + AG$, & AB au module AB.

Mais pour trouver l'aire de l'eſpace CPGB, contenu par la partie PC, d'une des conchoïdes de Nicomede, *BE étant l'aſymptote, A le pole, & ABC perpendiculaire à BE.*

Fig. 23. Nommez AB, a, BC, b, AG, y, AB, x : tirez Ap, infiniment proche de AP, & de A décrivez les petits arcs mr, pn; enſuite raiſonnant comme ci-deſſus, on aura $\frac{abbdx}{2aa + 2xx} + \frac{abdx}{\sqrt{aa + xx}}$ = à l'aire du petit eſpace $GPpm$ = à l'élement de l'eſpace $CPGB$. La premiere partie de cette differentielle ſe réduit à la ſeconde forme des Tables de M. *Cottes*;

car faisant $D=abb$, $z=x$, $\theta=o$, $n=2$, $e=2aa$, $f=2$; la differentielle de cette seconde forme qui est $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}$ dz, deviendra $\frac{abbdx}{2aa+2xx}$; dont l'integrale sera $\frac{2}{n}DR\left|\frac{R+T}{S}\right.$, dans laquelle substituant pour $R\ (=\sqrt{\frac{-e}{f}})\ \sqrt{-aa}$, pour $T\ (=z^{\frac{1}{2}n})\ x$, & pour $S\ (=\sqrt{\frac{e+fz^n}{f}})\ \sqrt{aa+xx}$, on aura $\frac{1}{2}bb\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$ pour l'integrale de la premiere partie $\frac{abbdx}{2aa+2xx}$; de même la seconde partie de la differentielle, qui est $\frac{abdx}{\sqrt{aa+xx}}$, peut se comparer à la sixiéme forme des Tables de M. *Cottes*, en faisant $D=ab$, $z=x$, $\theta=o$, $n=2$, $e=aa$, $f=1$; dont l'integrale est (θ étant $=o$) $\frac{2}{nf}DR$ $\left|\frac{R+T}{S}\right.$, laquelle faisant $R=1$, $T=\frac{1}{x}\sqrt{aa+xx}$, & $S=\frac{a}{x}$, deviendra $ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$. Ainsi la somme de ces integrales $\frac{1}{2}bb\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.+ab\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$ sera l'integrale de toute la differentielle; consistant en deux parties, dont la premiere est la mesure d'un angle quelconque, parce que $R=\sqrt{-aa}$; & la seconde celle d'un raport, à cause que $R=\sqrt{1}=1$.

La construction de cette integrale peut se faire ainsi: tirez CF, perpendiculaire à AC, prenez BH, égale à la mesure du raport de $BG+AG$, & AB à AB pris pour module, c'est-à-dire, faites $BH=a\left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right.$. *Fig. 24.*

De plus prenez BI, égale à la mesure de l'angle GAB, au même module AB, c'est-à-dire $=a\left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$, dont le rayon, tangente & secante, sont toujours comme a, x, & $\sqrt{aa+xx}$, ou comme AB, BG, AG. Cela fait, tirez AIE, & HD, parallele; vous aurez par-là le trapeze $BHDC$, égal à toute l'integrale, & par consequent égal à l'espace $CPGB$:

car puiſque les triangles ABH, ACD, ſont ſemblables, on aura $AB\,(a) : BI\,(a \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.) :: AC\,(a+b) : CE = a \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + b \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$; & $\frac{\overline{CE+IB}}{2} \times BC = \frac{ab}{2} \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + \frac{bb}{2} \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. =$ au trapeze $BIEC$. De plus, HI, $(= BH - BI) = a \left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. - a \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$; qui multiplié par BC (b), & le produit $ab \left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. - ab \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right.$ (= au parallelograme $HDEI$) qui étant ajoûté au trapeze $BIEC$, donnera $\frac{ab}{2} \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + \frac{bb}{2} \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. - \frac{ab}{2} \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + ab \left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. = \frac{bb}{2} \left|\frac{a+x}{\sqrt{aa+xx}}\right. + ab \left|\frac{x+\sqrt{aa+xx}}{a}\right. =$ à l'integrale qu'il falloit conſtruire égale au trapeze $BHDC$.

Fig. 23. Si la conchoïde CPD, eſt de telle nature, que $AB \times BC$ $(ab) = AG \times GP\,(yb)$; en ſuivant le même raiſonnement qu'on a déja fait, on aura $\frac{aaby^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}} + \frac{a^3bby^{-3}dy}{2\sqrt{yy-aa}}$, pour l'aire du petit eſpace $GPpm =$ l'élement de l'eſpace $GPCB$; & les integrales de chaque partie de cette differentielle, peuvent ſe trouver comme l'on a trouvé celles de la differentielle qui ſe raporte à la 5e forme des Tables de M. *Cottes*.

Car faiſant $D = aab$, $z = y$, $\theta = 0$, $n = 2$, $e = -aa$, $f = 1$, la differentielle de cette cinquiéme forme, par exemple, $\frac{Dz^{\theta n-1}}{\sqrt{e+fz^n}}dz$ deviendra $\frac{aaby^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}}$ pour la premiere partie de la differentielle, & faiſant $D = \frac{a^3bb}{2}$, $z = y$, $\theta = 1$, $n = 2$, $e = -aa$, $f = 1$, on aura ſuivant ladite forme $\frac{a^3bby^{-3}dy}{2\sqrt{yy-aa}}$, pour la ſeconde & derniere partie de la differentielle; & l'integrale dans le premier cas qui répond à $\theta = 0$, ſera $\frac{-2}{ne} \left|\frac{R+T}{S}\right.$, & dans le dernier cas répondant à $\theta = -1$, l'in-

tegrale sera $\frac{-1}{nez^n} DP + \frac{f}{ne} DR \Big| \frac{R+T}{S}$. Par conséquent mettant à la place de P ($= \sqrt{e+fz^n}$) $\sqrt{yy-aa}$, pour R ($= \sqrt{e}$) $\sqrt{-aa}$, pour T ($= \sqrt{e+fz^n}$) $\sqrt{yy-aa}$, & pour S ($= \sqrt{fz^n}$) y; la premiere integrale deviendra $ab \Big| \frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}$, & la derniere sera $\frac{abb}{4yy}\sqrt{yy-aa} + \frac{bb}{4} \Big| \frac{a-\sqrt{yy-aa}}{y}$; & la somme de ces integrales $\frac{abb}{4yy}\sqrt{yy-aa} + ab + \frac{bb}{4} \Big| \frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}$ = à l'integrale de toute la differentielle susdite, qu'on peut construire de cette maniere.

Faites AG (y) : $\frac{1}{2} AB$ ($\frac{1}{2} a$) :: $\frac{1}{2} BC$ ($\frac{1}{2} b$) : $BN = \frac{ab}{4y}$, & AG (y) : GB ($\sqrt{yy-aa}$) :: BN ($\frac{ab}{4y}$) : $BM = \frac{ab}{4yy}\sqrt{yy-aa}$, & si ensuite à BM vous ajoûtez MO = à la mesure de l'angle BAG, dont le rayon, tangente & secante sont comme AB (a), BG ($\sqrt{yy-aa}$) & AG (y) au module $AB + \frac{BC}{4}$ ($a + \frac{b}{4}$), le rectangle $CB \times BO$, sera égal à l'integrale $\frac{abb}{4yy}\sqrt{yy-aa} + ab + \frac{bb}{4} \Big| \frac{a+\sqrt{yy-aa}}{y}$ = à l'espace $GPCB$. Fig. 24.

Exemple XV.

33. *Soit DPEBQD la moitié de la lunule d'*Hypocrate*, A étant le centre de l'arc DQB, & C le centre de l'arc DPE; il faut trouver l'aire de l'espace QPEB, compris par BE, partie de la ligne ACEB, qui joint les deux centres A, C; & par les parties QB, PE, des arcs qui forment la moitié de la lunule; & la partie QP d'une ligne quelconque AQP tirée du centre A du plus grand arc, compris entre lesdits arcs.*

Que DCF soit perpendiculaire à ACE. Tirez Aqp, infiniment proche de $AGQP$, & du centre A, décrivez les petits arcs Gr, ps, & joignez les points P & E. Fig. 25.

Cela fait, soit $AC = a$, $CG = x$, $AG = y$. A cause des triangles semblables AGC, rgG, on aura AG (y) : AC (a) ::

$Gg\ (dx) : Gr = \frac{adx}{y}$, & parce que les triangles AGC, AEP, font auffi femblables, l'angle A, étant commun à tous deux, & l'angle APE, dans la demie-circonference étant égal à l'angle droit ACG; on aura $AG\ (y) : AC\ (a) :: AE\ (2a) : AP = \frac{2aa}{y}$. De même à caufe des fecteurs femblables AGr, Asp, on aura $AG\ (y) : Gr\ (\frac{adx}{y}) :: AP\ (\frac{2aa}{y}) : sp = \frac{2a^3dx}{y^3}$, qui étant multiplié par $\frac{1}{2}\ AP\ (\frac{aa}{y})$ le produit $\frac{2a^5dx}{y^4}$ = à l'aire du petit fecteur Aps = au petit triangle ApP, car ils ne different feulement que du petit triangle pPs, qui eft infiniment plus petit que le triangle Aps. De plus à caufe des fecteurs femblables AGr, Asp, on aura $AG\ (y) : Gr\ (\frac{adx}{y}) :: AQ\ (a\sqrt{2}) : Qq = \frac{aadx\sqrt{2}}{yy}$, qui multiplié par $\frac{1}{2}\ A\ (\frac{a}{2}\sqrt{2})$ & le produit $\frac{a^3dx}{yy}$, fera égale au petit fecteur ou triangle AQq, qui étant fouftrait de $\frac{2a^5dx}{y^4}$, aire du triangle ApP, le refte $\frac{2a^5dx}{y^4} - \frac{a^3dx}{yy}$ fera = à l'aire du trapeze $QPpq$, élement de l'efpace $EPQB$ de la lunule.

De plus, à caufe que $yy = aa + xx$; ce qui donne $xx = yy - aa$: prenant la differentielle de cette équation, on aura $xdx = ydy$ & $dx = \frac{ydy}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{yy-aa}}$, en mettant pour x, fa valeur $\sqrt{yy-aa}$; maintenant fi on fubftituë cette derniere valeur de dx dans la differentielle de l'efpace de la lunule cherchée, on aura $\frac{2a^5dy}{y^3\sqrt{yy-aa}} - \frac{a^3dy}{y\sqrt{yy-aa}} = \frac{2a^5y^{-3}dx}{\sqrt{yy-aa}} - \frac{a^3y^{-1}dy}{\sqrt{yy-aa}}$, dont chaque partie fe raporte à la cinquiéme forme des Tables de M. *Cotes*. Car dans la premiere partie, faifant $D = 2a^5$, $z = y$, $\theta = -1$, $n = 2$, $e = -aa$, $f = 1$, on aura la differentielle de cette forme $\frac{Dz^{\theta n-1}}{\sqrt{e+fz^n}} dz = \frac{2a^5y^{-3}dy}{\sqrt{yy-aa}}$; de même dans la feconde partie, faifant

$D = -a^3$,

$D = -a^3$, $z = y$, $\theta = 0$, $n = 2$, $e = -aa$, $f = 1$, on aura $\frac{Dz^{\theta n}}{\sqrt{e + fz^n}} dz = \frac{-a^3 y^{-1} dy}{\sqrt{yy - aa}}$; & l'integrale répondant à $\theta = -1$, sera $\frac{-1}{nez^n} DP + \frac{f}{nee} DR \left| \frac{R+T}{S} \right. = \frac{a^3}{yy} \sqrt{yy - aa} + aa \left| \frac{a + \sqrt{yy - aa}}{y} \right.$, en substituant $\sqrt{yy - aa}$ pour P ($\sqrt{e + fz^n}$), a pour R ($\sqrt{e}$), $\sqrt{yy - aa}$ pour T ($\sqrt{yy - aa}$), & y pour S ($\sqrt{fz^n}$). Celle qui répond dans les Tables à $\theta = 0$, est $\frac{-2}{ne} DR \left| \frac{R+T}{S} \right. = -aa \left| \frac{a + \sqrt{yy - aa}}{y} \right.$, en substituant les mêmes valeurs. C'est pourquoi la somme de ces integrales $\frac{a^3}{yy} \sqrt{yy - aa} + aa \left| \frac{a + \sqrt{yy - aa}}{y} \right. - aa \left| \frac{a + \sqrt{yy - aa}}{y} \right. = \frac{a^3}{yy} \sqrt{yy - aa}$, (puisque les mesures du même angle au module aa, sont l'une affirmative, & l'autre négative, par consequent se détruisent), $=$ à l'integrale de l'élement de l'espace $EPQB$ $= EPQB$ de la lunule.

On peut construire plus aisément cette integrale ; car si on tire une ligne droite du centre C au point P, le triangle isocele CPE est $=$ à l'integrale $\frac{a^3}{yy} \sqrt{yy - aa} = \frac{a^3}{yy} x$ (puisque $x = \sqrt{yy - aa}$) $=$ à l'espace $EPQB$ de la lunule, comme nous allons le démontrer.

Tirez PH parallele à GC, ce qui donnera, à cause des triangles semblables AGC, APH; AG (y) : AP ($\frac{2aa}{y}$) : : GC (x) : $PH = \frac{2aax}{yy}$. Ainsi $\frac{1}{2} PH$ ($\frac{aax}{yy}$) $\times$ CE (a) $= \frac{a^3 x}{yy} =$ à l'integrale qu'il falloit construire $=$ à l'aire du triangle CPE, ce qui donne pour l'aire de la demie-lunule $CE \times \frac{1}{2} DC$ $= \frac{1}{2} aa$. De cette maniere on parvient à la quadrature de cet espace par le calcul differentiel ; ce qu'on peut véritablement démontrer plus briévement par la géometrie ordinaire.



EXEMPLE XVI.

34. *Quarrer l'espace cycloïdale ; ou, ce qui est la même chose, trouver l'aire d'un segment quelconque AMG.*

Fig. 26. Que *APB* soit le cercle generateur ; *AP* une ordonnée quelconque, *PM*, l'abscisse correspondante ; que *mp* soit infiniment proche de *MP* ; que *PM* touche le cercle generateur en *P*, & *MT* la cycloïde en *M*. Maintenant par la proprieté de la cycloïde, la soutangente $PT = PM =$ à l'arc *AP*. Tirez *AG* perpendiculaire à *AB*, & des points *M*, *m*, tirez *MG*, *mg*, perpendiculaire à *AG*.

Présentement que $AQ = x$, $AB = 1$: parce que $TP = PM$, l'angle $MTP = PMT$; par conséquent l'angle $TPQ = 2TMP$. Mais la mesure de l'angle *APQ* est la moitié de l'arc *AP*, qui est aussi la mesure de l'angle *TPA* ; donc $APQ = TMP = Mms$. Par conséquent les triangles *APQ*, *MmS*, étant semblables ; $AQ\ (x) : QP\ (\sqrt{x - xx}) :: MS\ (dx) : mS = dx\,\frac{\sqrt{x - xx}}{x}$, mais $dx\,\frac{\sqrt{x - xx}}{x}$, réduit en une série infinie, sera $x^{-\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}\,dx - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}\,dx$ *&c.* = à l'élement de l'ordonnée *QM*, & l'integrale de cette differentielle ; sçavoir $2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$ *&c.* sera l'ordonnée *MQ*. Par conséquent, $QM \times dx$ = à la differentielle de l'espace cycloïdale $AMQ = 2x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}}\,dx - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}\,dx$ *&c.* dont l'integrale sera $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$ *&c.* = à l'aire de l'espace indéfini de la cycloïde *AMQ*.

Maintenant si $mS = gG = \frac{dx\sqrt{x - xx}}{x}$, est multiplié par $GM = AQ = x$; alors l'élement *GMSG* de l'aire *AMG* sera $= dx\,\sqrt{x - xx}$. Or puisque cette derniere differentielle égale à l'élement du segment du cercle *APQ*, l'espace *AMG* sera égal au même segment du cercle *APQ* ; & par conséquent l'aire *ADBC* de toute la cycloïde *ADB*, est égal à l'aire du demi-cercle *APB*.

COROLLAIRE.

Parce que BD eſt égal à la demie-circonference du cercle ; ſi vous l'apellez p, & AB, a ; alors le rectangle $ABDE = ap =$ à l'aire du demi-cercle APB. D'où il ſuit que l'eſpace exterieur de la cycloïde $AEDMA = \frac{1}{4} ap$. C'eſt pourquoi l'aire de la demie-cycloïde $ADB = \frac{3}{4} ap$, $AMDPA = \frac{1}{2} ap$. Par conſequent l'aire de la cycloïde eſt triple de ſon cercle generateur.

EXEMPLE XVII.

35. *Quarrer la ciſſoïde de* Diocles ; *ou, trouver l'aire d'un ſegment quelconque APM de cette courbe.*

Que ADB ſoit le cercle generateur, BH l'aſymptote de la courbe (AI) ciſſoïdale, coupant à angles droits le diametre AB du cercle ; ſupoſons ce diametre $AB = 1$, l'abciſſe $AP = x$, & l'ordonnée correſpondante PM de la ciſſoïde $= y$. Fig. 17.

Maintenant l'équation qui exprimera la nature de cette courbe, ſera $PB \times \overline{PM}^2 = \overline{AP}^3$; c'eſt-à-dire, $y^2 - xy^2 = x^3$; ainſi $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$; d'où on tire $y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = x^{\frac{3}{2}} \times \overline{1-x}^{\,-\frac{1}{2}}$; & $ydx = x^{\frac{3}{2}} \times \overline{1-x}^{\,-\frac{1}{2}}\, dx =$ à l'élement de l'aire APM ; dont l'integrale ſera $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{2.7} + \frac{1.3x^{\frac{9}{2}}}{4.9.} + \frac{1.3.5x^{\frac{11}{2}}}{4.6.11} + \frac{1.3.5.7x^{\frac{13}{2}}}{4.6.8.13}$ &c. $= \sqrt{x}$, multiplié par $\frac{2}{5} x^4 + \frac{1}{7} x^6 + \frac{1.3x^8}{4.9.} + \frac{1.3.5x^{10}}{4.6.11.} + \frac{1.3.5.7x^{12}}{4.6.8.13}$ &c. $=$ à l'eſpace APM ; & quand $x = 1$, alors la ſerie ſe changera en celle-ci $\frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1.3}{4.9} + \frac{1.3.5}{4.6.11} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13} =$ à l'aire de l'eſpace infini $ABHIA$.

Autrement.

Que AB ſoit $= a$, & $PN = z$. Mais par la nature de la courbe $ay^2 - xy^2 = x^3$, & differentiant l'équation, on aura

$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$, & $\overline{2a - 2x} \times dy = ydx = \frac{3x^2dx}{y}$. Mais par une autre proprieté de la courbe $x^2 = zy$; ainsi $\frac{x^2}{y} = z$. Présentément faisant $a - x = PE = u$; ce qui donnera $2udy - ydx = 3zdx$; ainsi l'integrale de l'une est égale à l'integrale de l'autre : mais zdx est l'élement $PNnp$ du segment ANP du cercle; & à cause que $u = PE = OM$, & $dy = mR = oO$; $mMOo$, est l'élement de l'aire $AMOB$, & ydx, l'élement de l'aire AMP. Quand l'integrale de udy exprime l'aire de tout l'espace cissoïdale $ABHIA$, l'integrale de xdy sera le même aire; ainsi l'integrale de $2udy - ydx =$ l'integrale de udy. Par conséquent, puisque dans le même cas l'integrale de zdx est l'aire du demi-cercle ANB, & que l'integrale de $udy = 3zdx$, tout l'espace cissoïdale $ABHIA$, sera triple du demi-cercle génerateur ANB.

EXEMPLE XVIII.

36. *Quarrer un espace infini HPMI, compris par l'asymptote PH, par l'ordonnée PM, & par la partie MSI de la courbe logarithmique MI.*

Fig. 28. Nommez la soutangente PT, a, (parce qu'elle est une quantité constante par la nature de cette courbe) & l'ordonnée PM, y. Tirez l'ordonnée pm infiniment proche, & de M tirez la perpendiculaire Mq à mq. Maintenant à cause des triangles semblables MTP, mMq; $MP\ (y) : TP\ (a) :: mq\ (dy) : Mq = \frac{ady}{y}$; ce qui donne $MP \times Mq = y \times \frac{ady}{y} = ady$, pour l'élement de l'aire $IMPH$, dont l'integrale sera ay; c'est-à-dire, l'aire de l'espace infini $IMPH = MP \times PT$.

COROLLAIRE.

Si l'ordonnée $QS = z$; alors l'espace infini $ISQH = az$, & par conséquent $SMPQ = ay - az = a \times \overline{y - z}$; c'est-à-dire, l'espace compris entre deux demies-ordonnées MP, SQ, la partie de l'abscisse PQ, & celle de la courbe MS est égale à $TP \times \overline{PM - SQ}$; ainsi l'espace $BAPM$ est à l'es-

pace $BMSQ$, comme la difference des ordonnées AB, PM, est à la difference des ordonnées PM, QS.

EXEMPLE XIX.

37. *Quarrer tout espace spirale.*

Que le rayon du cercle soit $AC=a$, la circonference $=b$, & un arc quelconque $AB=x$, & l'ordonnée correspondante $CM=y$. Concevez le rayon Cb infiniment proche de CB, & tirez le petit arc ME. *Fig. 29.*

La proprieté de la spirale d'*Archimede*, est que $AC \times AB$ $=$ à la circonference b multiplié par CM; c'est-à-dire, $ax=by$. Ceci étant accordé, le petit arc $ME=\frac{ydx}{a}$, puisque $CB : Bb :: CM : ME$. Ainsi $\frac{1}{2}\ CM \times ME =$ l'aire du petit secteur MCE=au petit espace triangulaire CMm, élement de l'espace spirale $=\frac{y^2dx}{2a}$; mais par la nature de la courbe $ax=by$; par conséquent $\frac{a^2x^2}{b^2}=yy$. Donc substituant $\frac{a^2x^2}{b^2}$ pour yy, dans l'expression differentielle, on aura $\frac{ax^2dx}{2b^2}$; dont l'integrale sera $\frac{ax^3}{6b^2}$ pour l'aire du segment de l'espace spirale; & si au lieu de x on met b, égal à toute la circonference, tout l'espace spirale $=\frac{1}{6}\ ab$.

De plus, la nature de tous les espaces spirales circulaires peuvent s'exprimer par cette équation generale $a^mx^n=b^ny^m$, ainsi $\frac{a^mx^n}{b^n}=y^m$, & $\frac{ax^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}}=y^2$; donc $\frac{y^2dx}{2a}=\frac{ax^{\frac{2n}{m}}dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$ Dont l'integrale sera $\frac{max^{\frac{2n+m}{m}}}{4n+2m \times b^{\frac{2n}{m}}}$; ainsi mettant b pour x, tout l'espace spirale sera $\frac{mab}{4n+2m}$.

Il faut remarquer, que si l'arc AB est à BM, comme

l'abſciſſe à l'ordonnée, dans quelques courbes géometriques que ce ſoit, l'eſpace ſpirale peut être quarré par les mêmes moyens que nous avons ſuivis ci-devant. *Par exemple*; que AB ſoit à BM, comme l'abſciſſe d'une parabole eſt à ſon ordonnée; & que prenant p pour le parametre $px = a^2 - 2ay + yy$, & $dx = \frac{2ydy - 2ady}{p}$, ce qui donne $\frac{y^2dx}{2a} = \frac{y^3dy - ay^2dy}{ap}$, dont l'integrale ſera $\frac{y^4}{4ap} - \frac{y^3}{3p}$.

On peut de la même maniere trouvér l'aire de l'eſpace compris par l'arc AB, & la ſpirale AM; dont l'élement & le trapeze $BMmb = \overline{Bb + Mm} \times \frac{1}{2} mb$. Mais $Bb = dx$, $Mm = \frac{ydx}{a}$, $mb = a - y$; par conſequent $BMmb$ ($\overline{dx + \frac{ydx}{a}} \times \overline{\frac{1}{2} a - y}$) $= \frac{a^2dx - y^2dx}{2a}$.

Maintenant que la courbe ſoit une ſpirale parabolique, ſubſtituez $\frac{2ydy - 2ady}{p}$ pour ſon égal dx; ce qui donne $\frac{ay^2dy + a^2ydy - y^3dy - a^3dy}{ap}$ pour l'élement de l'eſpace ABM, dont l'integrale $\frac{y^3}{3p} + \frac{ay^2}{2p} - \frac{y^4}{4ap} - \frac{a^2y}{p}$ ſera égal à l'aire de cet eſpace.

EXEMPLE XX.

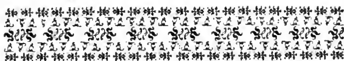
38. *Quarrer un eſpace quelconque ACMP, de la quadratrice, compris entre la baze AC, l'abſciſſe AP, l'ordonnée correſpondante PM, & la partie CM de la même quadratrice.*

Fig. 30. Que Cc ſoit le quart du cercle génerateur, A le centre: tirez AmM, & des points m, M, abaiſſez les perpendiculaires me, ME.

Faites $AC = 1$, $AP = x$, $PM = y$. Enſuite par la proprieté de cette courbe, AP (x) $= EM =$ l'arc Cm, du quart du cercle. Ainſi, *par la ſcholie premiere, exemple* 4 *de la*

derniere ſection, le ſinus *em*, $= 1 + x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$ *&c.* & le ſinus du complement $Ae = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$ *&c.* Mais à cauſe des triangles ſemblables *Ame*, *APM*, on aura *me* ($1 + x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$ *&c.*) : *Ae* ($1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$ *&c.*) : : *AP* (x) : *PM* (y) $= 1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 - \frac{2}{945} x^6$ *&c.*) d'où il ſuit que $ydx = dx - \frac{1}{3} x^2 dx - \frac{1}{45} x^4 dx - \frac{2}{945} x^6 dx$ *&c.* = à l'élement de l'aire *ACMP*, dont l'integrale $= x - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{225} x^5 - \frac{2}{6615} x^7$ *&c.* = à l'aire *ACPM*.





SECTION IV.

Usage du calcul integral pour trouver la rectification des courbes.

PROBLEME.

39. *Rectifier une courbe quelconque ; ou , trouver une ligne droite qui lui soit égale.*

Fig. 31.

PUisqu'on peut concevoir une courbe comme formée par un nombre infini de petites lignes droites ; ainsi une de ces lignes étant trouvée par le calcul differentiel ordinaire , c'est-à-dire , l'élement de la courbe étant trouvé ; alors la somme des élemens , ou , ce qui est la même chose , l'integrale de cette expression differentielle , sera la longueur d'une ligne droite égale à la ligne courbe.

Maintenant , que *PM* (y soit l'ordonnée , coupant à angles droits l'abscisse *AP* (x) d'une courbe quelconque *AM* ; & que *TM* soit tangente à la courbe en *M*. Tirez *Pm* parallele & infiniment proche de *PM* , & du point *M* , tirez *Mm* perpendiculaire à *pm* , ce qui donne Pp ($= Mn$) $=dx$, & nm , $=dy$, & *Mm* , pour la differentielle ou partie infiniment petite de la courbe *AM* , qu'il faut premierement trouver ; ce qui se fait ou en trouvant les valeurs de $\overline{Mn}^2$ (dx^2), ou de $\overline{mn}^2$, (dy^2) par l'équation de la courbe differentiée ; parce que $\sqrt{dx^2+dy^2}=Mm$. Ou bien en faisant comme la soutangente *TP* , ou l'ordonnée *PM* (dy) est à la tangente *TM* ; ainsi la differentielle de l'abscisse *M n* , (dx) ou *mn* , (dy) est à une quatriéme proportionnelle qui $= Mn$, differentielle de la courbe *AM*. Car le petit triangle rectangle *Mmn* , est semblable au triangle rectangle *TMP* , & l'integrale

grale de cette differentielle sera l'arc cherché. Quelques exemples rendront ceci évident.

COROLLAIRE.

Il suit de ce que nous venons de dire que si on tire PQ, perpendiculaire à la tangente TM ; PQ ou $QM : PM\ (y) ::$ $Mn\ (dx)$ ou $nm\ (dy) : Mm$, differentielle de la courbe AM.

EXEMPLE I.

40. *Trouver la longueur d'un arc quelconque AM, de la parabole ordinaire.*

En ce cas on a $AP \times a = \overline{PM}^2$; c'est-à-dire, $ax = yy$; differentiant chaque membre de l'équation, on aura $adx = 2ydy$, & quarrant chaque membre $aadx^2 = 4y^2dy^2$, & $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{aa}$, & ajoûtant dy^2, à cette derniere expression, il viendra $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{4y^2dy^2}{aa}} = \frac{dy}{a}\sqrt{aa + 4yy}$ $= Mm$, differentielle de la courbe AM, dont l'integrale sera $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ *&c.* $=$ à l'arc AM. Fig. 31.

Autrement.

Par la mesure d'un raport.

Cette même differentielle de la parabole $\frac{dy}{a}\sqrt{aa + 4yy}$ peut se raporter à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*. Faites $z = y$, $n = 2$, $\theta = 0$, $D = \frac{1}{a}$, $e = aa$, $f = 4$; ce qui donne $Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1}dz\sqrt{e + fz^n} = \frac{dy}{a}\sqrt{aa + 4yy}$, & l'integrale de cette forme, qui répond à $\theta = 0$, sera $\frac{z^n}{n}DP + \frac{e}{nf}DR\left|\frac{R + T}{S}\right.$, & faisant $P\left(= \sqrt{\frac{e + fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{y}\sqrt{aa + 4yy}$, $R\left(= \sqrt{f}\right)$ $= 2$, $T\left(= \sqrt{\frac{e + fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{y}\sqrt{aa + 4yy}$, $S\left(= \sqrt{\frac{e}{z^n}}\right) =$

$\frac{a}{y}$, la même integrale sera $\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.$ qu'on peut construire de cette maniere.

Fig. 32. Du sommet A, tirez AB, coupant l'ordonnée PM (y) en B ; ce qui donne $AB\ (=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PB}^2})=\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}$, & multipliant le numerateur & le dénominateur du raport $\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}$ par $\frac{y}{2a}$; elle se changera en celle-ci $\frac{\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{yy}{a}}{\frac{1}{2}y}$, c'est-à-dire, $\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.=\frac{a}{4}\left|\frac{\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{yy}{a}}{\frac{1}{2}y}\right.$.

Mais $\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4yy}+\frac{yy}{a}=AB+PB$, & $\frac{1}{2}y=PB$; ainsi $\frac{a}{4}$ est égal à la distance du foyer, suivant la nature de la parabole. C'est pourquoi $\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.=AF\left|\frac{AB+AP}{PB}\right.$ $=$ à la mesure du raport de $AB+AP$ & PB, à la distance du foyer AF, comme module. Ce qui étant ajoûté à AB, le tout sera $\frac{y}{2a}\sqrt{aa+4y^2}+\frac{a}{4}\left|\frac{\sqrt{aa+4yy}+2y}{a}\right.=$ à l'integrale de la differentielle $\frac{dy}{a}\sqrt{aa+4yy}=$ à la longueur de l'arc AM de la parabole, d'où on tire cette regle pour trouver la longueur de la courbe de la parabole ordinaire.

Soit A le sommet, F le foyer, AP l'axe, & PM une ordonnée à cet axe. Tirez AB coupant l'ordonnée PM au point B ; prolongez-là jusqu'en C ; en sorte que BC soit la mesure du raport de $AB+AP$, & PB, au module AF ; ce qui donne AC, pour la longueur de l'arc AM de la parabole. C'est-là la construction que M. *Cottes* donne dans son *Harmonia mensurarum*, *page* 12.

Dans cette courbe la soutangente $TP=2AP=2x$, d'où $TM=\sqrt{4xx+ax}$. C'est pourquoi TP $(2x)$: TM $(\sqrt{4xx+ax})$: : Mn (dx): $Mm=\frac{\sqrt{4xx+ax}}{2x}\times dx=$ à l'élement de la courbe. Or puisque $ax=yy$, donc $x=\frac{yy}{a}$ & $2x$

$= \frac{2yy}{a}$, & $4xx = \frac{4y^4}{aa}$. Par conſequent $\frac{\sqrt{4y^4 + yy}}{aa} = TM$. Maintenant $PM\ (y) : TM\ (\sqrt{\frac{4y^4}{aa} + yy}) :: nm\ (dy) : Mm = dy \frac{\sqrt{\frac{4y^4}{aa} + yy}}{y} = dy \frac{\sqrt{aa + 4yy}}{a}$, comme ci-devant; & l'integrale de $dx \frac{\sqrt{4xx + ax}}{2x}$, ſupoſant $a = 1$, ſera $x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{7}\sqrt{x^7} - \frac{10}{9}\sqrt{x^9}$ &c.

COROLLAIRE.

Si AC, DC ſont deux demies axes conjugués d'une hyperbole équilaterale, & qu'on ſupoſe $AC\ (= DC) = a$, parametre de la parabole; ſoit l'ordonnée $PM = 2y$, l'abſciſſe $QM = x$: ce qui donne $AP = x - a$, & parce que $PC \times AP = \overline{PM}^2$; c'eſt-à-dire, $xx - aa = 4yy$; donc $xx = 4yy + aa$. Par conſequent $x = \sqrt{4yy + aa}$. Et ſi on tire qm infiniment proche de QM, on aura $Qq = dy$; ainſi la differentielle $QqmM$ de l'aire hyperbolique $CQMA$ ſera $dy \sqrt{aa + 4yy} =$ à l'élement de la parabole. Par conſequent la rectification de la parabole dépend de la quadrature de cet eſpace hyperbolique : & de même la rectification d'une courbe quelconque peut ſe raporter à ſa quadrature, en ſupoſant la differentielle, ou l'élement de la courbe qu'il faut rectifier, comme une ordonnée, & la quantité changeante de cette differentielle comme une abſciſſe à cette ordonnée. Par conſequent on peut quelquefois rectifier les courbes d'une maniere plus abregée lorſqu'on connoît d'avance la quadrature de la courbe à laquelle on peut la raporter. *Fig. 32.*

EXEMPLE II.

41. ***Rectifier une parabole du ſecond degré; dont l'équation eſt $ax^2 = y^3 =$ (ſupoſant $a = 1$,) $x^2 = y^3$.***

Puiſque $x^2 = y^3$, donc $2xdx = 3y^2dy$, & $4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$, & $dx^2 = \frac{9y^4dy^2}{4x^2} = \frac{9y^4dy^2}{4y^3}$ (ſubſtituant y^3 pour ax^2)

$= \frac{9}{4} ydy^2$; c'est pourquoi $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\frac{9}{4}ydy^2+dy^2}$, (ajoutant dy^2 à chaque membre de l'équation $dx^2 = \frac{9}{4}ydy^2$) $= \frac{1}{2}\sqrt{9ydy^2+4dy^2} = \frac{1}{2} dy \sqrt{9y+4} =$ à l'élement de la courbe, dont l'integrale est $\frac{1}{27} \times \overline{9y+4} \times \sqrt{9y+4}$. Mais pour sçavoir s'il n'y a rien à ajouter ou à retrancher de cette integrale, faites $y=0$; alors ce qui reste est $\frac{4}{27}\sqrt{4} = \frac{8}{27}$; par conséquent la longueur de cette courbe sera (*) $\frac{1}{27} \times \overline{9y+4} \times \sqrt{9y+4} - \frac{8}{27}$.

* art. 19.

C O R O L L A I R E.

Fig. 31. Soit le parametre de la parabole ordinaire égal 1, $AP=1$, $PQ = \frac{9}{4}y$; ce qui donne $AQ = \frac{9}{4}y+1$, & à cause que le parametre est 1, $\overline{QN}^2$ $(= \frac{9}{4}y+1) = \frac{9y+4}{4}$. Par conséquent $QN = \frac{1}{2}\sqrt{9y+4}$; c'est pourquoi $QNnq$, élement ou differentielle de l'espace parabolique $PMNQ = \frac{1}{2} dy \sqrt{9y+4}$. Ainsi l'on voit que la longueur de la courbure parabolique du second degré, exprimée par cette équation $ax^2=y^3$ dépend de la quadrature de la parabole simple, ayant la même differentielle pour l'élement de son aire, & par consequent cette rectification peut se trouver en termes finis.

E X E M P L E III.

42. *Rectifier les paraboles de tous les degrés.*

Que le parametre soit $=1$; ensuite le nombre infini des paraboles de tous les degrés s'exprimera par cette équation $y^m=x$, dont la differentielle est $my^{m-1} dy = dx$, & en quarrant chaque membre on aura $m^2y^{2m-2} dy^2 = dx^2$, & si pour abreger vous faites $2m-2 = r$, vous aurez $m^2y^rdy^2 = dx^2$; ajoutant de part & d'autre dy^2, & extrayant ensuite la racine quarrée de chaque membre, il viendra $\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{m^2y^rdy^2+dy^2} = dy\sqrt{m^2y^r+1} =$ à l'élement de l'arc d'une parabole de quelque degré qu'elle soit, dont l'integrale, *par exemple* ; $y + \frac{m^2y^{r+1}}{2.\,\overline{r+1}} -$

$\frac{m^4 y^{2r+1}}{2.4.\overline{2r+1}} + \frac{1.3 m^6 y^{3r+1}}{2.4.6.\overline{3r+1}} - \frac{1.3.5 m^8 y^{4r+1}}{2.4.6.8.\overline{4r+1}}$ *&c.* est la longueur de cette courbe. Maintenant substituant $2m-2$ pour r, on aura pour le même arc, $y + \frac{m^2 y^{2m-1}}{2.\overline{2m-1}} - \frac{m^4 y^{4m-3}}{2.4.\overline{4m-3}} + \frac{1.3 m^6 y^{6m-5}}{2.4.6.\overline{6m-5}} - \frac{1.3.5 m^8 y^{8m-7}}{2.4.6.8.\overline{8m-7}}$ *&c.*

EXEMPLE IV.

43. *Trouver la longueur d'une partie quelconque BC de la spirale équiangulaire ou logarithmique.*

Supofé le rayon $AB=a$, $AC=b$; que BD (c) touche la spirale en B, & que AD soit perpendiculaire à BD. Nommez BD, p; que PE touche de même la spirale en P, & que AE lui soit perpendiculaire. De plus, que Ap soit infiniment proche de AP; du point A décrivez le petit arc Pm; ensuite faites $AP-AB=FP$, y. *Fig. 53.*

Or par la proprieté de cette courbe, un rayon quelconque AB, la coupe toujours dans un même angle; c'est-à-dire, fait toujours un même angle ABD avec la tangente BD; donc un triangle quelconque APE, est semblable au triangle donné ABD. Mais le petit triangle mpP est aussi semblable au triangle APE, l'angle en m étant droit $=E$, & l'angle en p étant commun aux deux triangles; d'où il suit que le petit triangle differentiel mpP est semblable au triangle ABD; d'où on tire $BD\ (c) : AB\ (a) :: mp\ (dy) : Pp = \frac{ady}{c}$ $=$ à l'élement de la partie PB de la courbe; & l'integrale $\frac{ay}{c}$ est la longueur de la partie PB; & mettant $b-a$ pour y, on aura $\frac{ba-aa}{c} =$ à la longueur BC; c'est-à-dire, que $BD\ (c) : AB\ (a) :: AC-AB$: à la longueur BC.

EXEMPLE V.

44. *Trouver la longueur d'un arc quelconque AP, de la ſpirale APC d'*Archimedes.

Fig. 34. Que CAM ſoit le cercle generateur. Nommez AC a, la circonference b, l'arc CM x, l'ordonnée AP de la ſpirale y, & que PT touche la ſpirale en P; coupant la ligne AT tirée du centre A de la ſpirale, perpendiculaire à AP dans le point T. De plus, que $Mm = dx$, tirez Am, & de la diſtance An, & du centre A, décrivez le petit arc np. Maintenant $ax = by$, exprime la nature de cette courbe. A cauſe des ſecteurs ſemblables AMm, Apn; on aura AM (a) : Mm (dx) : : $Ap = AP$ (y) : $Pn = \frac{ydx}{a}$, & parce que les triangles Ppn, PAT, ſont auſſi ſemblables; on aura pP (dy) : pn $(\frac{ydx}{a})$: : AP (y) : AT ſoutangente $= \frac{yydx}{ady}$. Mais $adx = bdy$; donc $dx = \frac{bdy}{a}$, en ſubſtituant cette valeur de dx, dans $\frac{yydx}{ady}$ on aura $AT = \frac{byy}{aa}$. De plus, à cauſe que le triangle TAP eſt rectangle, $\overline{AT}^2$ $(\frac{bby^4}{a^4}) + \overline{AP}^2$ $(yy) = \overline{TP}^2 = \frac{a^4yy + bby^4}{a^4}$; ainſi $TP = \frac{y}{aa}\sqrt{a^4 + bbyy}$; & AP (y) : TP $(\frac{y}{aa}\sqrt{a^4 + bbyy})$: : pP (dy) : $Pn = \frac{1}{aa}dy\sqrt{a^4 + bbyy} =$ à l'élement de la partie AP de la ſpirale, qui ſe raporte à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*.

Car faiſant $z = y$, $n = 2$, $\theta = 0$, $D = \frac{1}{aa}$, $e = a^4$, $f = bb$, on a $Dz^{\theta n + \frac{1}{2}n - 1} dz\sqrt{e + fz^n} = \frac{1}{aa}dy\sqrt{a^4 + bbyy}$, dont l'integrale eſt $\frac{z^n}{n}DP + \frac{e}{nf}DR\Big|\frac{R+T}{S}$, & mettant pour P, R, T, S; ou pour $\sqrt{\frac{e + fz^n}{z^n}}$, $\sqrt{f}$, $\sqrt{\frac{e + fz^n}{z^n}}$, $\sqrt{\frac{e}{z^n}}$, leurs valeurs $\frac{1}{y}\sqrt{a^4 + bbyy}$, b, $\frac{1}{y}\sqrt{a^4 + bbyy}$, $\frac{a^2}{y}$; alors il viendra $\frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + bbyy} + \frac{aa}{2b}\Big|\frac{\sqrt{a^4 + bbyy} + yb}{aa} =$ à l'integrale de la differentielle dont nous venons de parler.

On peut conſtruire ainſi cette integrale : coupez AP (y)

dans le point L, & tirez DL, parallele à la tangente PT, coupant la soutangente en D; ce qui donne $DL = \frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + bbyy}$, puisqu'il est égal à $\frac{1}{2}$ $PT = \frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + bbyy}$. De plus le module $\frac{aa}{2b}$ se trouve en faisant $AD\,(\frac{byy}{2aa}) : AL\,(\frac{y}{2}) :: AL\,(\frac{y}{2}) : AF = \frac{aa}{2b}$, & le raport $\frac{\sqrt{a^4 + bbyy} + yb}{aa}$

$$= \frac{\frac{y}{2aa}\sqrt{a^4 + bbyy} + \frac{by^2}{2aa}}{\frac{y}{2}},$$

comme l'on trouvera en divisant le numerateur & le dénominateur de cette derniere expression par $\frac{y}{2}$; ainsi ce raport $= \frac{LD + AD}{AL}$. De même, si à DL, vous ajoutez LQ, qui est la mesure du raport de $LD + AD$ à AL, la ligne DF en étant le module; toute la ligne DQ est égale à la longueur AP de la spirale.

De cette maniere vous pouvez trouver la longueur de toute la spirale, en faisant $y = a$, qui est le rayon du cercle generateur.

EXEMPLE VI.

45. *Trouver la longueur d'un arc quelconque CP de la spirale réciproque APC.*

Autour du centre A, & de la distance AC, décrivez le quart de cercle $BCMH$, & continuez AP en M. Or par la nature de cette courbe un de ses rayons quelconque AC est réciproquement comme l'angle BAC qu'il fait avec le premier rayon AB, ou comme l'arc BC; c'est-à-dire, que $AP : AC :: BC : BM$; ainsi $AP \times BM = AC \times BC$. *Fig. 55.*

Maintenant faites AB ou $AC = a$, & l'arc $BC = b$, l'arc $BM = x$, & $AP = y$; & l'on aura $ab = xy$. Tirez PG jusqu'à ce qu'elle touche la courbe en P, & tirez aussi AG perpendiculaire à AP. Suposez Ap infiniment proche de AP, & continuez-la jusqu'à ce qu'elle coupe l'arc du cercle en m, & de A, & de la distance Ap, décrivez le petit arc pn; à cause des secteurs semblables Anp, AMm; $AM\,(a) : Mm\,(dx) :: AP\,(y) : pn = \frac{ydx}{a}$; & de même à cause de la similitude des triangles APG, nPp, on a $Pn\,(dy) : pn\,(\frac{ydx}{a}) ::$

$AP\ (y) : AG = \frac{y^2 dx}{ady}$; differentiant l'équation de la courbe $ab = xy$; on aura $dx = \frac{abdy}{yy}$, qui étant ſubſtitué pour dx dans $\frac{yydx}{ady}$, viendra $AG = b$; c'eſt-à-dire, égale à la ligne tirée du centre A, perpendiculaire à un rayon quelconque AP de la ſpirale, qui coupe ſa tangente à l'extremité du rayon, ſera une grandeur conſtante, *par exemple*, = à l'arc BC, qui eſt égal à une ligne droite, perpendiculaire au premier rayon AB, quand le point C eſt à une diſtance infinie, & l'angle BAC infiniment petit ; c'eſt-à-dire, égale à AD diſtance de l'aſymptote DE du centre A. Ainſi $AP\ (y)$: $GP\ (\sqrt{bb+yy}) :: nP\ (dy) : Pp = \frac{dy}{y}\sqrt{bb+yy}$ = à l'élement de la courbe AP.

Cet exemple peut être raporté à la troiſiéme forme des Tables de M. *Cottes*. Car faiſant $z = y$, $\eta = 2$, $\theta = 0$, $D = 1$, $e = bb$, $f = 1$, on a $Dz^{\theta\eta-1}dz\sqrt{e+fz^\eta} = \frac{dy}{y}\sqrt{bb+yy}$, & ſon integrale $\frac{2}{\eta}DP - \frac{2}{\eta}DR \left|\frac{R+T}{S}\right.$, en ſubſtituant pour $P\ (\sqrt{e+fz^\eta})\ \sqrt{bb+yy}$, pour $R\ (=\sqrt{e})b$, pour $T\ (=\sqrt{e+fz^\eta})\ \sqrt{bb+yy}$, & pour $S\ (=\sqrt{fz^\eta})y$, ſera $= \sqrt{bb+yy} - b \left|\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y}\right.$; & ſi AC, ſupoſé invariable $= z$, alors l'integrale $\sqrt{bb+zz} - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z}\right.$ = l'arc APC ; & la difference de ces integrales, par exemple, $\sqrt{bb+zz} - \sqrt{bb+yy} + b\left|\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z}\right. - b\left|\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y}\right. = CF - PG + AF\left|\frac{AF+PG}{AP}\right. - AF\left|\frac{AF+CF}{AC}\right.$ = à la longueur de la partie PC de la courbe ; c'eſt-à-dire, que ſi à la difference $CF - PG$ des tangentes, vous ajoutez la difference des meſures du raport de $AF + PG$ & AP, au module AF, & du raport de $AF + CF$ & AC, au même module AF, le tout ſera la longueur de la partie PC de la courbe.

Or parce que $AF\left|\frac{AF+PG}{AP}\right. = AF\left|\frac{AP}{PG-AF}\right.$, & $AF\left|\frac{AF+CF}{AC}\right. = AF\left|\frac{AC}{CF-AF}\right.$, (*par la ſcholie, art.* 14.) par conſé-

quent

quent si LM est la mesure du raport de AC & $CF - AF$, au module AF, & de même lm, la mesure du raport de AP & $PG - AF$, au module AF ; la somme des differences des tangentes $CF - FG$, & la difference des mesures $lm - LM$, sera $=$ à la longueur de la partie PC de la spirale.

EXEMPLE VII.

46. *Trouver la longueur de l'arc CP de la courbe logarithmique CFG.*

Que AC, aP soient les ordonnées perpendiculaires à l'asymptote Af, & que CF, Pf, soient les tangentes : de même que n soit infiniment proche de P, tirez np parallele à af. *Fig. 36.*

Nommez AC, z, aP, y, & la soutangente invariable AF, ou af, b. Maintenant à cause de la similitude des triangles aPf, nPp, on a $AP\,(y) : fP\,(\sqrt{bb+yy}) :: nP\,(dy) : Pp = \frac{dy}{y}\sqrt{bb+yy} =$ l'élement de la partie infinie PG de la courbe, qui étant comparé à la troisiéme forme des Tables de M. *Cottes*, donne pour integrale (comme dans le dernier probleme) $\sqrt{bb+yy} - b\,\Big|\,\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y}$. De la même maniere on trouvera que l'élement de la partie infinie CPG, est $\frac{dz}{z}\sqrt{bb+zz}$; & pour son integrale $\sqrt{bb+zz} - b\,\Big|\,\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z}$; & la difference de ces integrales, *par exemple*, $\sqrt{bb+zz} - \sqrt{bb+yy} + b\,\Big|\,\frac{b+\sqrt{bb+zz}}{z} - b\,\Big|\,\frac{b+\sqrt{bb+yy}}{y} = CF - Pf + AF\,\Big|\,\frac{AF+Pf}{AP} - AF\,\Big|\,\frac{AF+CF}{AC}$, ou (*) $= CF - Pf + AF\,\Big|\,\frac{aP}{Pf-AF} - AF\,\Big|\,\frac{AC}{CF-AF}$.

Maintenant si on prend AL égal à $CF - AF$, & al égal $Pf - AF$, & que LM, lm, soient tirés paralleles à Af; alors par la proprieté de la courbe, LM ($=$ l'abscisse An) sera le logarithme du raport de l'ordonnée AC, à l'ordonnée Mn, c'est-à-dire, de AC à AL ; par conséquent LM, est le logarithme de $\frac{AC}{CF-AF}$. De même lm est le logarithme de ** art. 14.*

$\frac{aP}{Pf - AF}$, & ſupoſant la ſoutangente invariable AF, ou af (b) égal au module des logarithmes, la ligne LM (*) $= AF \;|\; \frac{AF + CF}{AC} = AF \;|\; \frac{AC}{CF - AF}$; & $lm = AF \;|\; \frac{AF + Pf}{aP} = AF \;|\; \frac{aP}{Pf - Af}$; c'eſt pourquoi ſi à $cf - Pf$, differences des tangentes, vous ajoutez $lm - LM$, differences des paralleles, le tout ſera égal à la longueur CP de la courbe.

* art. 14.

EXEMPLE VIII.

47. *Le ſinus PM d'un arc quelconque PM d'un cercle, étant donné avec le rayon, trouver la longueur de cet arc.*

Fig. 12. Que $AP = x$, le rayon $AC = 1$, & le ſinus ou l'ordonnée $PM = y$; par la proprieté du cercle on a $AP \times PB = \overline{PM}^2$, en termes algebriques $2x - xx = yy$. Differentiant, on aura $2dx - 2xdx = 2ydy$ & $dx = \frac{ydy}{1 - x}$, & quarrant viendra $dx^2 = \frac{yydy^2}{1 - 2x + xx} = \frac{y^2dy^2}{1 - y^2}$; car par l'équation de la courbe $2x - xx = yy$; donc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{y^2dy^2}{1 - y^2} + dy^2} = \sqrt{\frac{y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2}{1 - y^2}} = \sqrt{\frac{dy^2}{1 - y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \overline{1 - y^2}^{-\frac{1}{2}} dy$, élement de l'arc AM ; dont l'integrale eſt $y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.} y^9$ &c. = à la longueur de l'arc AM.

Maintenant ſi l'on nomme le premier terme A, le ſecond B, le troiſiéme C, le quatriéme D, &c. & que le ſecond terme ſoit multiplié par $\frac{1}{1}$, le troiſiéme par $\frac{3}{3}$, le quatriéme par $\frac{5}{5}$ &c. la ſerie déja trouvée ſe changera en celle-ci $y + \frac{1}{2.3} Ay^2 + \frac{3}{4.5} 3 By^2 + \frac{5}{6.7} 5 Cy^2 + \frac{7}{8.9} 7 Dy^2$ &c.

Autrement.

Tirez le rayon CM, achevez le rectangle infiniment petit

PMnp, faites $AB=1$; & comme ci-devant $AP=x$, $PM=y$; alors $x-xx=yy$, & à cauſe que le petit triangle rectangle *Mmn* eſt ſemblable au triangle *PMC*, on aura $PM(\sqrt{x-xx})$: $MC(\frac{1}{2})$: : Pp ou $Mn(dx)$: $Mm=\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}dx=\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}\times dx=$ à l'élement de l'arc *AM* ; dont l'integrale ſera $x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}$ &c. $=x^{\frac{1}{2}}$ multiplié par $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4$ &c.

Si le ſinus du complement *PC*, eſt égal à x, & le rayon $Ac=1$; alors l'élement *Mm*, de l'arc *CD*, étant le complement de *AM*, au quart de cercle, ſera $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}dx$, ou $\frac{\sqrt{x-xx}}{x-xx}dx$; car puiſque par la proprieté du cercle $1-yy=xx$, qui étant differentié ſera $-2ydy=2xdx$, & diviſant chaque membre de l'équation par 2, on aura $ydy=xdx$, & $dy=\frac{xdx}{y}$, & $dy^2=\frac{x^2dx^2}{yy}=\frac{x^2dx^2}{1-xx}$; par conſequent $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{\sqrt{x^2dx^2}}{1-xx}+dx^2=dx\sqrt{\frac{1}{1-xx}}$, dont l'integrale eſt $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+$ &c. $=$ à la longueur de l'arc *CD*.

SCHOLIE I.

Si l'arc *AM* (z) eſt donné dans les ſeries deja trouvées, & qu'il faille trouver le ſinus verſe ou baze *AP* (x) ou le ſinus *MP*. Pour trouver le ſinus verſe, extrayez la racine quarrée de cette équation (*) $z=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$ &c. *AP* étant $=x$; & pour trouver le ſinus *Pm* ; extrayez la racine quarrée de $z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$ &c. dans laquelle $PM=x$. * art. 3.

SCHOLIE II.

Cet exemple nous donne l'éclairciſſement du theoreme de M. *Hugnens* pour trouver la longueur d'un arc quelconque *AM* d'un cercle, ayant la corde *AM* de cet arc, & la corde *Am*, d'un arc égal à la moitié de la donnée. Voici Fig. 37.

le theoreme $\frac{8Am - AM}{3}$ = l'arc AM à peu près.

Nommez le rayon AC, a, l'arc AM, z, la corde AM, A, & la corde Am de l'arc AM, B. Ce qui donne A
* art. 3. ($= mp =$ à deux fois le sinus de $Am = \frac{1}{2}z$) (*) $= z - \frac{z^3}{4.6aa} + \frac{z^5}{4.4.120a^4} -$ &c. & $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2.16.6aa} + \frac{z^5}{2.16.16.120a^4} -$ &c. Maintenant multipliant B, par un nombre quelconque supposé n, & du produit soustrayés en A, & afin que le second terme $- \frac{nz^3}{2.16.6a} + \frac{z^3}{4.6aa}$ s'évanoüisse, faites-le $= 0$; ce qui donnera $n = 8$, ainsi $8B - A = 3z$ * $- \frac{3.z^5}{64.120a^4} +$ &c. c'est-à-dire, $\frac{8B - A}{3} = z$, l'erreur étant seulement de $\frac{z^5}{7680a^4} -$ &c. de trop.

SCHOLIE III.

Fig. 38.

Si la perpendiculaire AP d'un arc MAm, est prolongée, & qu'il faille trouver dans cette ligne le point F, tel qu'ayant mené les lignes FME, & Fme, elles renferment la partie Ee de la tangente du cercle en A, à peu près égale à la longueur de l'arc Mm.

Que C soit le centre, le diametre $AG = a$, & la perpendiculaire $AP = x$; ce qui donne PM ($= \sqrt{ax - xx}$) $= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^3} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} -$ &c. & AE (= l'arc AM)

$= a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40a^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112a^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Mais à cause de la similitude des triangles FMP, FEA ; on a $AE - PM$ ($\frac{1x^{\frac{3}{2}}}{4a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1x^{\frac{5}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{64a^{\frac{5}{2}}}$ &c.) : AP (x) : : AE ($a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6a^{\frac{1}{2}}}$

$+ \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40a^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112a^{\frac{5}{2}}} +$ &c.) : $AF = \frac{3}{2}a - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175a}$ — ou + &c.

Suposons maintenant $AF = \frac{3}{2}a - \frac{1}{5}x$; ensuite faisant $AH = \frac{1}{5}AP$, (x) & $GF = HC$, une ligne droite tirée de F par M, & un autre par m, couperont la partie Ee, à peu de chose près égale à la longueur de l'arc MAm ; l'erreur étant seulement de $\frac{2 \times 16x^3}{525a^3}\sqrt{ax}$ + ou — *&c.*

Scholie IV.

Si l'on veut l'aire d'un segment MAm, d'un cercle dont on a besoin, le plus exactement qu'il soit possible ; réduisez-là en une serie infinie ; *par exemple*, que le segment MAm soit $= \frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36a^{\frac{5}{2}}}$ *&c.* à peu près égale à $\frac{2}{3}\overline{AM + PM} \times \frac{4}{5}AP$, l'erreur étant seulement de $\frac{x^4}{70a^3}\sqrt{ax}$ + *&c.* de moins. Fig. 39.

Exemple IX.

48. *Rectifier l'élipse ; ou, trouver la longueur d'une partie quelconque AM de cette courbe.*

Que le demi grand axe AC soit a, son demi conjugué $Cc = b$, $AP = x$, & $PM = y$; par la proprieté de la courbe on aura $\frac{\overline{AP} \times \overline{Pa} \times \overline{Cc}^2}{\overline{AC}^2} = \overline{PM}^2$; c'est-à-dire, $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax - xx} = yy$; & prenant la difference de chaque membre de l'équation, on aura $2adx - 2xdx = \frac{2a^2}{b^2} \times ydy$, ou $adx - xdx = \frac{a^2}{b^2} \times ydy$; donc $dx = \frac{\frac{a^2}{b^2}ydy}{a - x}$, & quarrant chaque membre $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{a^2b^4 - 2ab^4x + b^4xx}$; & puisque par la proprieté de la courbe $bb \times \overline{2ax - xx} = aayy$, & $b^4 \times \overline{2ax - xx} = aabbyy$; si on substituë $aabbyy$ pour son égal dans le dénominateur, on aura $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{a^2b^4 - a^2b^2y^2} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2}$, & ajoûtant de part & Fig. 40.

d'autre dy^2 ; on aura $dx^2 + dy^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2} + dy^2 = \frac{a^2y^2dy^2 + b^4dy^2 - b^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2} = \frac{b^4 + \overline{a^2 - b^2} \times y^2}{b^4 - b^2y^2} \times dy^2$; & par conséquent $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{b^4 + \overline{a^2 - b^2}yy}{b^2 - yy}}$ = à l'élement Mm, de l'arc AM de l'élipse ; & supposant $b = 1$, $a^2 - bb$ ($= a^2 - 1$) $= c$; alors l'élement Mm de cet arc sera $dy \frac{\sqrt{1 + cyy}}{1 - yy}$; & son integrale sera, supposant $n = 1 + c$; $y + \frac{ny^3}{3.2} + \frac{ny^5}{5.2} - \frac{n^2y^5}{5.2.2.2.} + \frac{ny^7}{7.2} - \frac{n^2y^7}{7.2.2.} + \frac{n^3y^7}{7.2.2.2.2.}$ &c.

Mais pour trouver la longueur de l'arc MC de l'élipse, on peut s'y prendre de cette maniere ; soit $Pc = x$: & on aura $\overline{AC - PC} \times \frac{Cc}{AC} = \overline{PM}^2$, c'est-à-dire, $\overline{aa - xx} \times \frac{bb}{aa} = yy$; donc $\overline{aa - xx} \times bb = aayy$, differentiant chaque membre de l'équation, on aura $-2bbxdx = 2a^2ydy$, ou $-bbxdx = aaydy$, & $dx = \frac{aaydy}{-bbx}$, & en quarrant chaque membre $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{b^4xx}$. Or par l'équation de la courbe on a $x^2 = aa - \frac{aa}{bb}y^2$; donc $b^4x^2 = aab^4 - b^2y^2$; & substituant $aab^4 - b^2y^2$, pour b^4x^2 dans le dénominateur ; & $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{aab^4 - a^2b^2y^2} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2}$, ensuite ajoûtant de part & d'autre dy^2, on aura $dx^2 + dy^2 = (\frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2} + dy^2 = \frac{b^4 + a^2y^2 - b^2y^2}{b^4 - b^2y^2} \times dy^2) = \frac{b^4 + \overline{a^2 - b^2} \times yy}{b^4 - b^2y^2} \times dy^2$; c'est pourquoi $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{b^4 + \overline{a^2 - b^2}yy}{b^4 - b^2y^2}}\, dy$ = à l'élement de l'arc MC, qui est le même que l'élement de l'arc AM, quand $AP = x$; ainsi l'integrale de celle-ci a la même expression que l'integrale de l'aro AM.

Si $aa = a$, & $CP = x$, on aura la longueur de l'arc $MC =$
x
$+ \frac{bb}{2aa} \times \frac{x^3}{3a}$.

$$+\overline{\frac{b^2}{2aa}-\frac{b^4}{8a^4}}\times\frac{x^5}{5a^4}$$
$$+\overline{\frac{bb}{2aa}-\frac{b^4}{4a^4}+\frac{b^6}{16a^6}}\times\frac{x^7}{7a^6}$$
$$+\frac{bb}{2aa}-\frac{b^4}{8a^4}+\frac{3b^6}{16a^6}-\frac{5b^8}{128a^8}\times\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$

Car $\frac{bb}{aa}\times aa-xx=yy$; & $\frac{b}{a}\times\overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}=y$; donc $\frac{b}{a}\times\frac{-xdx}{\overline{aa-xx}^{\frac{1}{2}}}=dy$; de même $\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}\times dx^2=dy^2$, par conséquent $1+\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}\times dx^2=dx^2+dy^2$; & l'élement de l'arc MC , sera $\overline{1+\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}}^{\frac{1}{2}}\times dx$, qui étant réduit en une serie infinie, sera $=1+\frac{1}{2}\times\frac{bb}{aa}\times\frac{xx}{aa-xx}-\frac{1}{8}\times\frac{b^4}{a^4}\times\overline{\frac{xx}{aa-xx}}^2\times\frac{1}{16}\times\frac{b^6}{a^6}\times\overline{\frac{xx}{aa-xx}}^3-\frac{5}{128}\times\frac{b^8}{a^8}\times\overline{\frac{xx}{aa-xx}}^4$ &c. $\times\,dx=$

$$dx$$
$$+\frac{1}{2}dx\times\frac{bb}{aa}\times\overline{\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}},\ \&c.$$
$$-\frac{1}{8}dx\times\frac{b^4}{a^4}\times\overline{\frac{x^4}{a^4}+\frac{2x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}},\ \&c.$$
$$+\frac{1}{16}dx\times\frac{b^6}{a^6}\times\overline{\frac{x^6}{a^6}+\frac{3x^8}{a^8}},\ \&c.$$
$$-\frac{5}{128}dx\times\frac{b^8}{a^8}\times\frac{x^8}{a^8},\ \&c.$$

& l'integrale sera

$$x$$
$$+\frac{1}{2}\times\frac{bb}{aa}\times\frac{x^3}{3aa}+\frac{x^5}{5a^4}+\frac{x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$
$$-\frac{1}{8}\times\frac{b^4}{a^4}\times\qquad\frac{x^5}{5a^4}+\frac{2x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$
$$+\frac{1}{16}\times\frac{b^6}{a^6}\times\qquad\frac{x^7}{7a^6}+\frac{3x^9}{9a^8},\ \&c.$$
$$-\frac{5}{128}\times\frac{b^8}{a^8}\times\qquad+\frac{x^9}{9a^8},\ \&c.$$

étant égales aux series qu'on a proposées en premier lieu.

EXEMPLE X.

49. *Rectifier l'hyperbole ; ou , trouver la longueur de l'arc AM de cette courbe.*

Fig. 41. Que le centre soit C, le grand axe aA ($2a$), son demi axe conjugué Cc (b), l'abeisse AP (x) & l'ordonnée correspondante PM (y). Maintenant la proprieté de cette courbe est telle que $\frac{aP \times AP \times \overline{Cc}^2}{\overline{aA}^2} = \overline{PM}^2$; c'est-à-dire, que $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax + xx} = yy$, differentiant chaque partie de l'équation , on aura $2adx + 2xdx = \frac{2a^2}{b^2} \times ydy$, ou bien $adx + xdx = \frac{a^2}{b^2} \times ydy$; donc $dx = \frac{a^2ydy}{b^2 \times \overline{a+x}}$; & quarrant chaque membre de l'équation $dx^2 = \frac{a^4yydy^2}{a^2b^4 + 2ab^4x + b^4xx}$. Or par la nature de la courbe, $bb \times \overline{2ax + xx} = aayy$, & $b^4 \times \overline{2ax + xx} = a^2b^2y^2$; si on substituë $a^2b^2y^2$ pour $2ab^4x + b^4xx$, on aura $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{a^2b^4 + a^2b^2y^2} = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 + b^2y^2}$; ajoûtant présentement de chaque côté dy^2, vous aurez $dx^2 + dy^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 + b^2y^2} + dy^2 = \frac{b^4 + \overline{a^2 + b^2} \times yy}{b^4 + b^2yy} \times dy^2$. Par conséquent $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{b}$. $\frac{\sqrt{b^4 + \overline{a^2 + b^2} \times yy}}{b^2 + yy} = Mm$, élement de la rectification de l'arc AM ; qui est tout-à-fait le même que celle de l'élipse, dans le dernier exemple, excepté seulement que dans l'élipse le signe du terme b^2yy, est négatif, & qu'ici il est affirmatif ; par consequent l'integrale dans cet exemple est la même que celle de l'élipse, ayant seulement les signes differens, comme par exemple dans ce cas-ci $a^2 + 1 = c$, & $c - 1 = n$.

Nota. Si l'hyperbole est équilaterale, alors $2ax + xx = yy$, exprimera sa nature. Prenant sa difference on aura $2adx + 2xdx = 2ydy$, ou $adx + xdx = ydy$, & $dx = \frac{ydy}{a + x}$; quarrant chaque membre on aura $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{aa + 2ax + xx}$; & substituant yy ($= 2ax + xx$) dans le dénominateur ; on aura $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2 + yy}$. Par conséquent, $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{a^2+2y}{a^2+y^2}}$ = l'élement de l'arc AM ; faisant $a=1$ = $dy\sqrt{\frac{1+2y^2}{1+y^2}}$; dont l'integrale sera $y+\frac{y^3}{3.2}-\frac{y^5}{5.2}+\frac{y^7}{7.2.2.}$ $-\frac{y^7}{7.2.2.2.2}$, &c.

Scholie.

Si dans l'élipse MAm, AG = au grand axe, & AQ = au parametre, que QF soit pris $=\frac{1}{2}AQ\frac{19AG+21AQ}{10AG}\times AP$; & dans l'hyperbole, $QF=\frac{1}{2}AQ+\frac{19AC+21AQ}{10AG}\times AP$, & qu'on tire la secante FME : alors la tangente AE est presque égale à l'arc AM de l'élipse ou de l'hyperbole, si elle n'est pas trop longue. *Fig.* 18.

Exemple XI.

50. *Rectifier la cycloïde ; ou, trouver la longueur de l'arc AM de cette courbe.*

Que $AQ=x$, $AB=1$; $Qq=MS=dx$, & par la proprieté du cercle $PQ=\sqrt{x-xx}$: ainsi $AP=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, & par la similitude des triangles APQ, MmS, on a AQ $(x) : AP\ (x^{\frac{1}{2}}) :: MS\ (dx) : Mm = x^{-\frac{1}{2}}dx$ = l'élement de l'arc AM, dont l'integrale sera $2x^{\frac{1}{2}}=2AP$ = à l'arc AM. Ainsi la longueur AD de la moitié de la cycloïde égale deux fois le diametre AB du cercle generateur, ce que nous sçavons, par d'autres principes, être vrai. *Fig.* 26.

Exemple XII.

51. *Trouver la longueur d'un arc quelconque AM de la cissoïde de* Diocles *AMI.*

Que AB diametre du cercle generateur soit a, & nommé PB, x, l'ordonnée PM, y, alors $AP=a-x$. Maintenant par la nature de la courbe $PM\ (y) = AP \times \sqrt{\frac{AP}{PB}}$, qui est $y=\overline{a-x}\sqrt{\frac{a-x}{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\times\overline{a-x}|^{\frac{3}{2}}$; & prenant la diffe- *Fig.* 41.

rence de cette équation, viendra $dy = dx \times -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \times \overline{a-x}\,\big|^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \times \overline{a-x}\,\big|^{\frac{1}{2}} = \frac{-a-2x}{2x} \sqrt{\frac{a-x}{x}} \times dx$; & en le quarrant on aura $dy^2 = \frac{\overline{aa+4ax+4xx} \times \overline{a-x}}{4x^3} \times dx^2 = \frac{a^3+3aax-4x^3}{4x^3} \times dx^2$. D'où il suit que $dx^2+dy^2 = \frac{a^3+3aax}{4x^3} \times dx^2$; ainsi $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{adx}{2x} \sqrt{\frac{a+3x}{x}} = \frac{1}{2} ax^{-\frac{3}{2}} dx \times \sqrt{a+3x}$.

Presentement la comparant à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes* $Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1} dz \sqrt{e+fz^n}$, faisant $z=x$, $D=\frac{1}{2}a$, $\theta=-1$, $n=1$, $e=a$, $f=3$, on aura $P\ (\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}) = \sqrt{\frac{a+3x}{x}}$; $R\ (\sqrt{f}) = \sqrt{3}$; $T\ (\sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}) = \sqrt{\frac{a+3x}{x}}$ & $S\ (\sqrt{\frac{e}{z^n}}) = \sqrt{\frac{a}{x}}$. Ainsi l'integrale $= -\frac{2}{n} DP + \frac{2}{n} DR \,\Big|\frac{R+T}{S}$, deviendra l'integrale de la differentielle donnée $-\sqrt{\frac{a+3x}{x}} + a\sqrt{3}\,\Bigg|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{a+3x}{x}}}{\sqrt{\frac{a}{x}}}$, ou $= -a\sqrt{\frac{a+3x}{x}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\,\Big|\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+3ax}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}$.

Mais on doit changer cette integrale pour qu'elle exprime l'arc AM.

Pour y parvenir, faites $x=a$, l'integrale deviendra $-2a+3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\,\Big|\frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}$, si maintenant on en retranche l'autre integrale, on aura pour l'expression de la longueur de l'arc AM, $a\sqrt{\frac{a+3x}{x}} - 2a + 3\sqrt{\frac{1}{3}aa}\,\Bigg|\frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}$, se ressouvenant que la soustraction du raport $\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}$ du raport $\frac{\sqrt{a+\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{\frac{1}{3}aa}}$ est une division de la derniere par la premiere.

Pour conſtruire préſentement cette integrale ; tirez AC $(\sqrt{\frac{4}{3}aa})$ coupant l'aſymptote en C, de maniere que CAB ſoit le tiers d'un angle droit ; que BD $(\sqrt{ax})$ ſoit moyen proportionnel entre AB (a) & PB (x) ; tirez enſuite CD, $(\sqrt{\frac{1}{3}aa - ax})$. De même tirez AE, coupant $PM = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{a+3x}{x}}$, & vous aurez l'arc AM de la ciſſoïde $= 2AE - 2AB + 3BC \,|\, \frac{AB+AC}{BD+DC} = a\sqrt{\frac{a+3x}{x}} - 2a + 3\sqrt{\frac{1}{3}aa} \,|\, \frac{a+\sqrt{\frac{4}{3}aa}}{\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{1}{3}aa+ax}}$.





SECTION V.

Usage du calcul integral dans la cubation des solides & dans la quadrature de leurs surfaces.

PROBLEME.

52. *Cuber ou mesurer la solidité d'un corps quelconque, formée par la révolution d'une figure plane AMN, autour de l'axe AQ.*

Fig. 7. TIrez l'ordonnée *pm*, infiniment proche de *PM*; ensuite on peut prendre le parallelograme *PMrp*, pour le trapeze *PMmp*; par conséquent le cylindre formé par le petit parallelograme *PMrp*, pendant que la figure *ANQ* se meut autour de l'axe *AQ*, peut être pris pour l'élement de la portion du solide, formé par la circonvolution de la portion *AMP* de cette figure plane; & l'integrale de cet élement sera égal à la solidité de cette portion conçuë, comme composée d'un nombre infini de cylindres, chacun d'une hauteur infiniment petite.

Faites $AP = x$, $PM = y$, & que le raport du rayon du cercle à la circonference, soit exprimé par $\frac{r}{p}$. Alors la circonference du cercle décrit par le rayon *PM* sera $= \frac{py}{r}$, & l'aire dudit cercle sera $\frac{p}{2r} y^2$, qui étant multiplié par *Pp* (dx) deviendra $\frac{p}{2r} y^2 dx =$ à la solidité dudit cylindre *PMqp*, ou ce qui est la même chose à l'élement de la portion du solide; & si pour y^2, vous substituez sa valeur prise dans l'équation de la courbe *AMN*, vous aurez une expression differentielle affectée d'une seule quantité inconnuë x, dont l'integrale exprimera la solidité cherchée.

EXEMPLE PREMIER.

53. *Cuber un cone droit.*

Un cone droit peut être formé par la révolution d'un *Fig. 43.* triangle rectangle ABC, autour de son côté ou axe AB. Suposons maintenant $AB = a$, $BC = r$, $AP = x$, $PM = y$, alors à cause des triangles semblables APM, ABC ; $AP(x) : PM(y) :: AB(a) : BC(r)$; donc $\frac{rx}{a} = y$; & quarrant chaque membre $\frac{rrxx}{aa} = yy$. C'est pourquoi $\frac{py^2 dx}{2r}$ (= l'élement du (*) solide) $= \frac{pr^2x^2dx}{2a^2r} = \frac{prx^2dx}{2a^2}$, (substituant $\frac{rx}{a}$ pour y) = à l'élement de la solidité de la partie du cone formé par * *art. 52.* le triangle APM, dont l'integrale $= \frac{prx^3}{6a^2}$ = à la solidité de la partie du cone ; & si vous substituez a pour x, la solidité de tout le cone sera $\frac{pra^3}{6a^2} = \frac{1}{6} apr \times \frac{1}{3} a = \frac{1}{2} pr \times \frac{1}{3} a$, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier la baze par $\frac{1}{3}$ de la hauteur.

EXEMPLE II.

54. *Mesurer la solidité de la sphere, ou une portion quelconque d'icelle.*

La sphere est formée par la révolution d'un demi-cercle *Fig. 44.* ABa, autour de son axe ou diametre ACa, que le rayon $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$, ensuite par la proprieté du cercle generateur $yy = 2rx - xx$; donc $\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{2prxdx - px^2dx}{2r}$ = à l'élement du segment de la sphere formé per la revolution du demi segment du cercle APM, dont l'integrale $= \frac{3prx^2 - px^3}{6r}$ = la solidité du segment AMm ; & si on substituë tout le diametre $2r$, à la place de x, la solidité de toute la sphere sera $= \frac{12pr^3 - pr^3}{6r} = 2pr^2 - \frac{4}{3} pr^2 = \frac{2}{3} pr^2 = 2pr \times \frac{1}{3} r$; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier par ($\frac{1}{3} r$) $\frac{1}{3}$ du rayon ou $\frac{1}{6}$ du diametre, le rectangle du diametre $2r$, &

de la circonference p ; & si le diametre $2r=1$, alors la solidité de la sphere $= \frac{1}{6}p$.

COROLLAIRE I.

Il suit de-là qu'une sphere est égale à une piramide quadrangulaire, dont la baze est le rectangle produit par le diametre de la sphere $2r$, & par la circonference du cercle, dont la hauteur est égale au tiers du demi-diametre de la sphere.

COROLLAIRE II.

Puisque la solidité d'un cylindre circonscrit à une sphere est pr^2 ; ainsi elle est à la sphere, comme pr^2 est à $\frac{2}{3}pr^2$, ou comme $3pr^2$ à $2pr^2$, ou comme 3. à 2.

EXEMPLE III.

55. *Si EDBF est un cylindre droit, & que la partie DBMAF, soit coupé par un plan DFA passant par le centre C de la baze inferieure, & par F extremité du diametre FD de la superieure; on demande à mesurer ou cuber cette partie DBMAF, qu'on apelle l'*onglet.

Fig. 45. Que AD, soit perpendiculaire à $BE=2r$, tirez CF, & d'un point quelconque P, dans AD, tirez PM, parallele à CB, & PN, parallele à CF, joignez les points M, N, & nommez la hauteur FB, a. Maintenant un triangle quelconque PMN, rectangle en M, formé comme nous venons de dire, est semblable au triangle rectangle CBF. Cela suposé, nommez CP, x ; ensuite on aura $\overline{PM}^2 = rr-xx$; & $CB(r):BF(a)::PM(\sqrt{rr-xx}):MN = \frac{a}{r}\sqrt{rr-xx}$; & l'aire du triangle PMN, est $\frac{1}{2}PM \times MN = \frac{a}{2r} \times \overline{rr-xx}$, qui étant multiplié par Pp (dx) sera $\frac{arrdx-axxdx}{2r}$ = l'élement de la partie $APMN$ de l'*onglet*; dont l'integrale sera $\frac{arx}{2} - \frac{ax^3}{6r}$ = à la solidité de cette même partie $APMN$ & lorsque $x=r$, alors cette derniere expression sera $\frac{1}{3}ar^2=$

à la solidité de la moitié de l'*onglet*, & par consequent toute la solidité entiere $= \frac{2}{3} ar^2$.

EXEMPLE IV.

56. *Mesurer un solide formé par la révolution de la partie FmM de la* lunulle *d'*Hypocrate *FAD*, *autour du rayon ED comme axe.*

Tirez la tangente Aa ; nommez le rayon CE, 1 ; alors le rayon CA est $\sqrt{2}$: de même faites $EP = x$, l'ordonnée $PM = y$, & $Pm = z$; alors $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{PM}^2$; par la proprieté du cercle ; c'est-à-dire, en termes algebriques $2 - 1 - 2x - xx$ $(= 1 - 2x - xx) = yy$; & $\overline{ED}^2 - \overline{EP}^2 = \overline{Pm}^2$, ou bien, $1 - xx = zz$, d'où l'aire du cercle décrit par PM, sera $\frac{p - 2px - pxx}{2r}$; & l'aire du cercle décrit par Pm sera $\frac{p - pxx}{2r}$, & la difference de ces aires sera $\frac{px}{r} =$ à l'*anneau* décrit par Mm ; & multipliant cette expression par la differentielle dx, on aura $\frac{pxdx}{r} =$ à l'élement de la partie du solide décrit par la partie FmM de la *lunulle* ; dont l'integrale sera $\frac{pxx}{2r} =$ à la solidité de cette même partie.

EXEMPLE V.

57. *Cuber, ou mesurer un conoïde parabolique formé par la révolution d'un espace parabolique d'un ordre quelconque autour de son axe.*

Que le parametre $= 1$; que $AD = a$, $BD = r$, $AP = x$, $PM = y$. Maintenant la nature de toutes les paraboles s'exprime en general par $y^m = x$, d'où $y = x^{\frac{1}{m}}$; donc $yy = x^{\frac{2}{m}}$; par consequent $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{px^{\frac{2}{m}}dx}{2r} =$ l'élement du solide formé par la revolution de la partie APM de la parabole ; dont

l'integrale fera $\frac{mp}{2m+4 \times r} x^{\frac{m+2}{m}}$; & fubftituant y^2x pour $x^{\frac{m+2}{m}}$ fon égal , on aura $\frac{mpy^2x}{4+2m \times r}$ = l'integrale de ce même folide.

Si l'on fubftituë a , hauteur de tout le conoïde pour x ; & $2r$, diametre de la baze pour $2y$; alors la folidité de tout le conoïde fera $\frac{mpr^2a}{4+2m \times r} = \frac{m}{4+2m} \times apr = \frac{1}{2} pr \times \frac{ma}{2+m}$.

Il fuit de-là que fi la parabole ordinaire eft la courbe generatrice du conoïde ; alors $m=2$, donc $\frac{m}{2+m} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$. D'où il fuit qu'il faut multiplier la baze par la moitié de la hauteur ; par confequent le conoïde formé fera la moitié d'un cylindre de même baze & hauteur.

EXEMPLE VI.

58. ***Cuber un fpheroïde formé par le mouvement d'un efpace femi-éliptique autour de fon grand ou petit axe.***

Fig. 40. Faites $AP=x$, $PM=y$ & $Aa=a$, que le parametre $=b$; après quoi vous aurez $\overline{PM}^2 = AP \times b - \frac{\overline{AP}^2 \times b}{Aa}$; c'eft-à-dire , $yy=bx-\frac{bx^2}{a}$, pour exprimer la nature ou la pro-

* *art.* 52. prieté de l'élipfe. Par conféquent (*) $\frac{py^2}{2r} dx = \frac{pbx}{2r} - \frac{pbx^2}{2ra} \times dx = \frac{p^3x}{2r} dx - \frac{pbx^2}{2ra} dx$, élement du folide formé par la révolution de la partie de l'élipfe APM ; & l'integrale de cet élement fera $\frac{pbx^2}{4r} - \frac{pbx^3}{6ar}$ = audit folide.

Si l'on fubftituë tout l'axe a, à la place de x , tout le fpheroïde fera $\frac{pba^2}{4r} - \frac{pba^2}{6r} = \frac{6pba^2 - 4pba^2}{24r} = \frac{pba^2}{12r}$.

D'où il fuit que fi l'axe conjugué $Cc=2r$, alors on aura $4r^2=ab$; ainfi la folidité de tout le fpheroïde $=\frac{1}{3} par$; c'eft-à-dire ,

à-dire, un spheroïde éliptique est égal à un cone qui a pour sa hauteur le grand axe a de l'élipse, & pour le diametre de sa baze quatre fois l'axe conjugué, sçavoir $4r$; & parce que la hauteur d'un cylindre circonscrit à un spheroïde étant a, le diametre $=r$, la solidité de ce cylindre sera $\frac{1}{2} apr$; & par conséquent un spheroïde, aussi-bien qu'une sphere, est les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit.

Autrement.

On peut abreger cet exemple ainsi ; que $r=1$, l'expression generale (*) $\frac{pyy}{2r} dx$, deviendra $\frac{pyy}{2} dx$. * art. 52.

Faites $Cc=1$, $AC=a$, & $PC=x$, l'équation de l'élipse sera $1-\frac{xx}{aa}=yy$; & substituant $1-\frac{xx}{aa}$ pour yy, dans cette même expression generale ; on aura $\frac{pyy}{2} dx = \frac{p}{2} dx - \frac{pxx}{2aa} dx =$ l'élement de la partie du spheroïde formé par la révolution de la partie $MPcC$ de l'élipse, & pour son integrale on aura $\frac{px}{2}-\frac{px^3}{6aa}=\frac{p}{2}\times \overline{x-\frac{x^3}{3aa}}=$ la solidité de ladite partie du spheroïde ; & substituant a pour x, on aura $\frac{p}{2}\times \overline{a-\frac{a}{3}}=\frac{p}{2}\times\frac{3a-a}{3}=\frac{2}{3} a\times\frac{p}{2}$; mais $\frac{p}{2}=$ au cercle formé par la révolution de Cc ; par consequent la solidité du speroïde $=$ au $\frac{2}{3}$ du cylindre de même baze & de même hauteur.

EXEMPLE VII.

59. *Cuber, ou mesurer la solidité d'un conoïde hyperbolique, formée par la révolution d'une demie hyperbole autour de son grand axe.*

Que $AP=x$, $PM=y$, le parametre $=b$, & le grand axe $=a$. L'équation qui exprime la nature de la courbe, est $AP\times b+\frac{\overline{AP}^2\times b}{Aa}$; c'est-à-dire, $y^2=bx+\frac{bx^2}{a}$; ainsi $\frac{py^2}{2r}dx=\frac{pbxdx}{2r}+\frac{pdx^3}{2ra}dx=$ à l'élement du conoïde formé par la révolution de la partie APM de l'hyperbole autour Fig. 41.

de ſon axe Aa, dont l'integrale ſera $\frac{pbx^2}{4r} + \frac{pbx^3}{6ra} =$ à la ſolidité du même conoïde ; & quand la hauteur du conoïde $= a$, c'eſt-à-dire, quand $x = a$, on a pour la ſolidité du conoïde $\frac{6pba^2 + 4pba^2}{24r} = \frac{10pba^2}{24r} = \frac{5pba^2}{12r}$; & ſi l'axe conjugué $= 2r$, alors $2r = \sqrt{ab}$, & $4r^2 = ab$; & ſi vous ſubſtituez cette valeur dans la derniere expreſſion, la ſolidité du conoïde ſera $\frac{5}{3} par$ (*).

Quand l'hyperbole eſt équilaterale, ſon équation ſera $y^2 = ax + xx$, ce qui donne $\frac{py^2}{2r} dx = \frac{apxdx + px^2dx}{2r}$; dont l'integrale ſera $\frac{apx^2}{4r} + \frac{px^3}{6r}$, & par la même raiſon $2r$ étant dans ce cas $= a$, & $b = a$, la ſolidité ſera $\frac{5}{6} pa^2$.

Il ſuit de-là que la ſolidité du cylindre circonſcrit eſt $\frac{1}{2} par$, qui par conſéquent eſt à la ſolidité du conoïde, comme $\frac{1}{2} par$ eſt à $\frac{5}{3} par$, ou comme 3 à 10 ; & dans le conoïde formé par l'hyperbole équilaterale, le cylindre circonſcrit eſt $\frac{1}{4} pa^2$; donc ce même cylindre eſt au conoïde comme $\frac{1}{4} pa^2$ eſt à $\frac{5}{6} pa^2$, ou comme 3 à 10.

Faites $PC = x$, & $Cc = 1 = r$, $Ac = a$, comme ci-devant dans l'élipſe, l'équation de l'hyperbole ſera $yy = \frac{xx}{aa} - 1$, d'où $\frac{py^2}{2} dx = \frac{px^2}{2aa} dx - \frac{p}{2} dx$; dont l'integrale ſera $\frac{1px^3}{6aa} - \frac{px}{2}$, & parce que x ne commence point à A, il faut faire $x = a$; alors cette integrale ſe changera en celle-ci $\frac{pa}{6} - \frac{pa}{2}$, qui étant retranchée de la premiere, donnera $\frac{px^3}{6aa} - \frac{px}{2} + \frac{pa}{3} =$ le ſolide formé par la révolution de la partie AMP de l'hyperbole.

(*) Ce n'eſt que dans cette ſupoſition ; car ſi on prend d'autres points dans la courbe, le raport changera.



EXEMPLE VIII.

60. *Cuber un solide formé par la révolution d'un espace hyperbolique infini CABED, autour d'une de ses asymptotes CD.*

Que $AB=a$, $AC=b$, $CP=x$, $PM=y$, & que $Pp=dx$; ensuite que la circonference du cercle décrit par le rayon $AC=p$, & celle que décrit le rayon $PC=\frac{px}{a}$, qui multiplié par PM (y) donne $\frac{pxy}{a}$, pour la superficie d'un cylindre formé par le parallelogramme $CPMR$, qui multiplié de nouveau par Pp (dx) donne la solidité du petit cylindre $PpqM$, c'est-à-dire, $\frac{pxy}{a}dx=$ l'élement du solide; mais la nature de l'hyperbole par raport à ses asymptotes, est exprimée par $xy=ab$, donc $y=\frac{ab}{x}$ & $\frac{pxy}{a}dx=\frac{pabx}{ax}dx=pbdx$; dont l'integrale est $pbx=$ à la solidité de l'espace infini $CABED$; & si on substituë a pour x, toute la solidité entiere sera pba. Fig. 47.

EXEMPLE IX.

61. *Cuber, ou mesurer la solidité d'un conoïde formé par la révolution de l'espace hyperbolique AMBDC, autour de CD, moitié de l'axe conjugué de l'hyperbole AMB.*

Nommez CA, a, CD, b, CP, x, PM, y, BD, r; maintenant $\frac{py}{r}$ est le circuit décrit par le point M, & $\frac{pyy}{2r}$ est égal à tout le cercle qui a PM pour rayon; qui étant multiplié par dx, donne $\frac{pyy}{2r}dx$, pour l'élement du solide. Mais par la proprieté de la courbe $yy=\frac{aaxx+aabb}{bb}$; substituant la valeur de yy dans $\frac{py}{2r}dx$, on aura $\frac{aapxxdx+aabbpdx}{2bbr}$ pour l'élement du conoïde, dont l'integrale $=\frac{aapx^3}{6bbr}+\frac{aapx}{2r}$, & substi- Fig. 48.

tuant $\frac{bbyy}{xx+bb}$ pour aa, il viendra $\frac{px^2yy}{6rxx+6bbr} + \frac{bbpyyx}{2rxx+2bbr}$ $=$ à la solidité du conoïde formé par l'espace $AMPC$; & quand $x=b$, & $y=r$, alors tout le conoïde $= \frac{bpr}{3}$.

COROLLAIRE.

Un cylindre formé par la révolution du parallelograme $ACSB$, autour de l'axe CS, est $\frac{1}{2}\,pba$; ainsi il est à ce solide hyperbolique comme $\frac{1}{2}\,pba$, est à pba, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{2}$ est à 1, ou comme 1 à 2.

EXEMPLE X.

62. *Mesurer un solide formé par la révolution d'une parabole autour de sa demie-ordonnée CB.*

Fig. 49. Suposons $AB=r$, $BC=b$, $AP=x$, $PM=y$; ensuite si on supose que le parametre $=1$, l'équation qui exprime la nature de la parabole, est $y^2=x$, & comme il est évident
* *art.* 52. (*) que l'élement de ce solide est le cercle décrit par le rayon MD multiplié par $Dd=dy$. Que le raport du rayon à la circonference soit comme r à p ; mais $MD=PD=AB-AP=r-x$. La circonference du cercle décrit par MD, est $=p-\frac{px}{r}$, & l'aire de ce même cercle est $\frac{pr}{2}-px+\frac{px^2}{2r}$ d'où l'élement ou la difference du solide est $\frac{prdy}{2}-pxdy+\frac{px^2dy}{2r}$.

Maintenant si au lieu de x & de x^2, vous substituez leurs valeurs y^2 & y^4, prises de l'équation de la courbe, vous aurez $\frac{prdy}{2}-py^2dy+\frac{py^4dy}{2r}=$ l'élement de la partie indéfinie du solide formé par la révolution de la portion MCD, autour de l'axe BC ; dont l'integrale sera $\frac{1}{2}\,pry-\frac{py^3}{3}+\frac{py^5}{10r}$ $=$ à la solidité de ladite partie.

* *art.* 52. Mais si au lieu de y^2 vous substituez x, sa valeur dans l'expression generale (*) la même solidité donnera $\frac{1}{2}\,pry-\frac{pxy}{3}+\frac{px^2y}{10r}=p\times\frac{1}{2}\,ry-\frac{xy}{3}+\frac{x^2y}{10r}$; & si vous substituez b,

pour y, & r pour x, tout le ſolide ſera $p \times \overline{\frac{1}{2}br - \frac{1}{3}br + \frac{1}{10}br} = \overline{30 - 20 + 6} \times \frac{pbr}{60} = \frac{8}{30}pbr = \frac{1}{2}pr \times \frac{8}{15}b$; c'eſt-à-dire, que la baze, ou, ce qui eſt la même choſe, le cercle décrit par le rayon AB, doit être multiplié par $\frac{8}{15}$ de la hauteur BC.

Or un cylindre de même baze & hauteur eſt $\frac{1}{2}pbr$, donc il eſt à ce ſolide parabolique comme $\frac{1}{2}pbr$ eſt à $\frac{1}{2}pbr \times \frac{8}{15}b$; c'eſt-à-dire, comme 1 à $\frac{8}{15}$, ou comme 15 eſt à 8.

EXEMPLE XI.

63. *Cuber, ou, meſurer un ſolide formé par la révolution de la courbe logarithmique autour de ſon aſymptote AH.*

Dans cette courbe la ſoutangente étant toujours invariable $= a$, $ydx = ady$; donc $dx = \frac{ady}{y}$. D'où il ſuit que $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{paydy}{4r}$ = l'élement d'une partie du ſolide formé comme il vient d'être dit, dont l'integrale ſera $\frac{pay^2}{4r}$; ſubſtituant $r = AB$, au lieu de y, on aura pour le ſolide entier $\frac{par^2}{4r} = \frac{1}{4}apr$. *Fig. 28.*

Il ſuit de-là que puiſqu'un cylindre dont la hauteur $= a$, & dont le rayon de la baze $= r$, eſt $\frac{1}{2}apr$; par conſéquent ce cylindre eſt au ſolide comme $\frac{1}{2}a$ eſt à $\frac{1}{4}a$, ou bien comme 2 eſt à 1.

EXEMPLE XII.

64. *Cuber un ſolide formé par la révolution de la ciſſoïde autour de la ligne AB comme axe.*

Que $AB = 1$, $AP = x$, $PM = y$; par la nature de la courbe on aura $y^2 = \frac{x^3}{\overline{1-x}}$, ainſi $\frac{py^2}{2r}dx = \frac{px^3}{2r \times \overline{1-x}}dx$; c'eſt-à-dire, (faiſant $2r = AB = 1$) $= \frac{px^3}{\overline{1-x}}dx$, dont l'integrale ſera $\frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7$ &c. = à la portion du ſolide décrit par APM; & ſubſtituant $AB = 1$, pour x, il viendra *Fig. 27.*

$\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p$ &c. ou $p \times \overline{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}$, &c. mais cette ſerie eſt infinie, comme il eſt aiſé de le démontrer par la nature de l'hyperbole ; donc le ſolide eſt infini par la même raiſon.

Autrement.

Par la meſure d'un raport.

Si l'aire APM de la ciſſoïde de Diocles, *ſe meut autour de la baze AB comme axe, on demande la meſure du ſolide qui en réſultera.*

Fig. 50. Par la proprieté de la courbe, nommant AP, x, & PM, y, on aura $x\sqrt{\frac{x}{a-x}} = y$, d'où il ſuit que $\frac{pyy}{2r}dx = \frac{p}{2r}dx \frac{x^3}{a-x}$ = lélement du ſolide requis, qui comparé à la premiere forme des Tables de M. *Cottes*, faiſant $D = \frac{p}{2r}$, $\theta = 4$, $\eta = 1$, $e = a$, $f = -1$; donnera $-\frac{px^3}{6r} - \frac{paxx}{4r} - \frac{paax}{2r} - \frac{pa^3}{2r} \Big| \frac{a-x}{a}$ pour l'integrale de la differentielle donnée ; ou bien $-\frac{px^3}{6r} - \frac{pax^2}{4r} - \frac{paax}{2r} + \frac{pa^3}{2r} \Big| \frac{a}{a-x}$; puiſque le logarithme de a, à $a-x$, avec le ſigne affirmatif, eſt le même que celui du raport de $a-x$ à a, avec le ſigne négatif.

On peut conſtruire cette integrale de la maniere ſuivante : Que AP (x), $AB (a)$, AR $(\frac{aa}{x})$, AS $(\frac{a^3}{xx})$, AT $(\frac{a^4}{x^3})$ ſoient en proportion continuë. Enſuite au module TS $(\frac{a^4 - a^3x}{x})$ prenez PX égal à la meſure du raport qui eſt entre AB (a) & PB $(a-x)$; c'eſt-à-dire, faites $PX = \frac{a^4 - a^3x}{x} \Big| \frac{a}{a-x}$; & de X vers B, faites XZ égale à $SR + \frac{RB}{2} + \frac{BQ}{3} = \frac{a^3 - a^2x}{xx} + \frac{aa - ax}{2x} + \frac{a-x}{3}$, & le ſolide ſera égal à un cylindre dont la baze eſt PM, dont la valeur eſt $\frac{px^3}{2r \times \overline{a-x}}$, & dont la hauteur PZ aura pour ſa valeur $-\frac{a^3 - a^2x}{xx} - \frac{aa - ax}{2x} - \frac{a-x}{3} +$

$\frac{a^4 - a^3x}{x^3} \mid \frac{a}{a-x}$; par conſequent $\frac{p}{2r} \times \frac{x^3}{a-x} \times - \frac{a^3 - a^2x}{xx} - \frac{aa - ax}{2x} - \frac{a-x}{3} + \frac{a^4 - a^3x}{x^3} \mid \frac{a}{a-x} = - \frac{px^3}{6r} - \frac{paxx}{4r} - \frac{paax}{2r} + \frac{pa^3}{2r} \mid \frac{a}{a-x}$, qui eſt l'integrale qu'il falloit conſtruire.

SCHOLIE.

65. La valeur du ſolide infini formé par la révolution de la ciſſoïde *AMI*, autour de l'aſymptote *BOH*, peut ſe trouver de cette façon : Que *ANB* ſoit le demi-cercle generateur, *AP*, x, *AB*, a, alors toutes les ordonnées *PM* décriront des ſurfaces cylindriques. Par conſequent $r : p :: PB \times PM \; (x \sqrt{ax - xx}) : \frac{px}{r} \sqrt{ax - xx} =$ à la ſurface décrite par *PM* ; lequel multiplié par dx deviendra $\frac{pxdx}{r} \sqrt{ax - xx}$ qui ſera l'élement du ſolide formé comme nous l'avons déja expliqué. Fig. 50.

Pour trouver préſentement l'integrale de cette differentielle, concevons que le demi-cercle generateur circule autour d'un axe parallele à l'aſymptote *BOH*, & que dans ce mouvement il paſſe par le point *A* ; alors toutes les ordonnées *PN*, décriront auſſi des ſurfaces cylindriques ; ainſi $\frac{p}{r} xdx \sqrt{ax - xx}$ ſera l'élement du ſolide formé par ce mouvement, qui eſt égal à l'élement du premier ſolide qu'il falloit cuber ou meſurer ; dont le ſolide ciſſoïdale infini, formé ſuivant la révolution qui vient d'être dite, eſt égal au dernier ſolide formé par la révolution du demi-cercle generateur, autour d'une ligne droite parallele à ſon aſymptote, paſſant par le point *A*.

PROBLEME II.

66. Meſurer la ſuperficie d'un ſolide formé par la révolution d'une figure AMNQ, autour de ſon axe AQ.

Que le raport de la circonference au diametre d'un cercle quelconque ſoit $\frac{r}{p}$: que $AP = x$, $PM = y$; enſuite vous Fig. 7.

aurez $Pp = Mq = dx$, $qm = dy$; donc $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; la circonference décrite par le rayon $PM = \frac{py}{r}$, qui multiplié par Mm, est égal à $\frac{py}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ = à l'élement d'une partie de la superficie du solide formé par la révolution de la partie AMP de la figure $AMNQ$; substituant maintenant la valeur de dx^2 qu'on trouvera par l'équation de la courbe differentiée, l'integrale de cette expression donnera la superficie cherchée.

Scholie.

67. Si $\frac{p}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est l'élement d'une superficie formée par la révolution d'une figure plane autour de la ligne x, comme axe ; & si $\frac{p}{r}$ exprime le raport du rayon à la circonference du cercle, & que y represente une ordonnée quelconque perpendiculaire à l'abscisse décrivant un cercle pendant la révolution qui forme cette superficie ; & si on supose que $\frac{p}{2r} zz$, est l'integrale de cet élement, je veux dire égal à un cercle dont le rayon est z ; alors l'integrale de $2y\sqrt{dx^2 + dy^2} = zz$, quarré du rayon dudit cercle. Par conséquent, si au lieu de trouver l'integrale de l'élement $\frac{py}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, d'une superficie quelconque formée comme nous venons de dire, on trouve l'integrale de $2y\sqrt{dx^2 + dy^2}$; cette integrale sera égale au quarré du rayon du cercle égal à l'integrale de l'élement $\frac{py}{2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou à un cercle égal à cette superficie, dont cette derniere expression est l'élement.

Exemple I.

68. *Trouver la superficie d'un cone droit.*

Fig. 43. Un cone droit étant formé par la révolution d'un triangle rectangle ABC, autour de son axe AB, il faut d'abord trouver la valeur de dx^2, par l'équation au triangle : ainsi soit $AB = a$, $BC = r$, $AP = x$, $PM = y$, & par la proprieté des triangles rectangles $AP\ (x) : PM\ (y) :: AB\ (a) : BC\ (r)$; par

par conſequent $rx = ay$, qui étant differentiée, donne $rdx = ady$, donc $dx = \frac{ady}{r}$, & $dx^2 = \frac{aady^2}{rr}$; ſubſtituant à preſent $\frac{a^2dy^2}{r^2}$ pour dx^2 dans l'expreſſion generale $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on aura $\frac{py}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{py}{r^2}\sqrt{a^2dy^2 + r^2dy^2} = \frac{py}{r^2} \times dy \sqrt{a^2 + r^2} =$ l'élement d'une partie de la ſurface conique, formée par la révolution du triangle APM, dont l'integrale ſera $\frac{py^2}{2r^2}\sqrt{a^2 + r^2} =$ à cette même partie de la ſuperficie; & ſubſtituant y pour r, toute la ſuperficie entiere du cone ſera $= \frac{1}{2}p\sqrt{a^2 + r^2} = \frac{1}{2}p \times AC$; c'eſt-à-dire, égale au rectangle formé par la moitié de la circonference de la baze, & par le côté AC du cone.

EXEMPLE II.

69. *Trouver la ſuperficie d'une ſphere, ou celle d'un de ſes ſegmens quelconque.*

Si le diametre du cercle generateur $= 1$, alors l'élement de l'arc $Mm = \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}}$, qui étant multiplié par la circonference décrite par le rayon PM, donnera pdx pour l'élement d'une partie de la ſuperficie de la ſphere formée par le demi-ſegment AMP; & l'integrale px de cette differentielle ſera la ſuperficie du ſegment de la ſphere ayant p, pour peripherie ou circonference de la baze circulaire, & x pour hauteur; & ſi vous ſubſtituez le diametre de la ſphere 1 pour x, toute la ſuperficie de cette ſphere ſera égale à p, ou (faiſant $1 = a$) $= ap$. *Fig. 45.*

Il ſuit de-là que la ſuperficie d'un ſegment quelconque de la ſphere, eſt à la ſuperficie de la ſphere entiere comme px eſt à p, ou x à 1, c'eſt-à-dire, comme la hauteur du ſegment eſt au diametre de la ſphere.



O

EXEMPLE III.

70. *Trouver la superficie d'un conoïde parabolique.*

L'équation qui exprime la nature de la parabole est $AP \times a = \overline{PM}^2 (yy)$ ou $ax = yy$, qui étant differentié, donne $adx = 2ydy$; d'où il suit que $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$; par conséquent $\frac{py}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{py}{ar} \times \sqrt{4y^2dy^2 + a^2dy^2} = \frac{py}{ar} \times dy\sqrt{4y^2 + a^2}$ = à l'élement de la superficie de la partie du conoïde, formée par la portion APM de la parabole qui revient au premier cas de la troisiéme forme de la petite *Table des simples courbes qui peuvent être quarrées*, *art.* 8. ou bien, à la troisiéme forme des Tables de M. *Cottes*; car si dans la petite Table vous faites $D = \frac{p}{ar}$, $z = y$, $n = 2$, $e = aa$, $f = 4$, vous aurez la differentielle $Dz^{n-1} dz \sqrt{e + fz} = \frac{pydy}{ar} \sqrt{4y^2 + a^2}$, & pour son integrale $\frac{2D}{3nf} R^3$, qui en faisant $R (= \sqrt{e + fz}) = \sqrt{4y^2 + a^2}$, deviendra $\frac{p}{12ar} \times \overline{4y^2 + aa}^{\frac{3}{2}}$ = à l'integrale de l'élement de la superficie du conoïde.

De la même maniere, dans la troisiéme forme des Tables de M. *Cottes*, on verra que l'integrale qui répond à $\theta = 1$, est $\frac{2e + 2fz^n}{3nf} DP$, faisant $P (= \sqrt{e + fz^n}) = \sqrt{4y^2 + a^2}$; & substituant, comme ci-devant, les valeurs de D, n, e, f, viendra $\frac{2aa + 8yy}{24} \times \frac{p}{ar} \sqrt{4y^2 + a^2} = \frac{p}{12ar} \overline{4y^2 + a^2}^{\frac{3}{2}}$ = à ce qui a été trouvé suivant la petite Table des Quadratures.

Fig. 51. On peut construire cette integrale de cette sorte : faites $r = y$, tirez $PC = 2y$, $PB = a$, & joignez BC; alors $BC = \sqrt{4yy + aa}$ que vous nommerez n, & l'integrale à construire sera $\frac{p}{12ay} n^3$. Que z soit le diametre du cercle égal à cette integrale, son aire sera $\frac{pz^2}{8y}$. Par conséquent $\frac{p}{12ay} n^3 = \frac{pz^2}{8y}$ c'est-à-dire, $\frac{n^3}{12a} = \frac{z^2}{8}$; ainsi $\frac{8n^3}{12a} = z^2$, d'où il suit que $z =$

* art. 67. $\sqrt{\frac{2n^3}{3a}}$ = à l'integrale de $2y\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Faites maintenant $PH = BC$, & $PE = \frac{1}{3} BC$, joignez B, E. De H tirez HF, parallele à BE : faites $GP = PF$, coupez GH en D, duquel comme centre décrivez le demi-cercle GKH, coupant PM prolongé en K, alors la ligne droite PK, sera le diametre d'un cercle égal à la superficie du conoïde diminuée d'un sixiéme d'un cercle dont le rayon égale a.

EXEMPLE IV.

70. *Trouver la superficie du spheroïde formé par la révolution d'une partie quelconque AM d'une élipse autour de la partie DC du demi-axe Bc.*

Nommez le demi-axe AC, a, son conjugué BC, b, l'abscisse PA, x, & l'ordonnée correspondante MP, y ; maintenant $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax - xx} = yy$, & $2adx - 2xdx = \frac{2a^2}{b^2} \times ydy$, ou $adx - xdx = \frac{a^2}{b^2} ydy$ & $dx = \frac{\frac{a^2}{b^2} ydy}{a - x}$; donc $dx^2 = \frac{a^2 y^2 dy^2}{b^4 - b^2 y^2}$; par conséquent l'élement de l'arc AM ($= \sqrt{dx^2 + dy^2}$) sera $= \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{b^4 + a^2 - b^2 y^2}{b^2 - y^2}} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{b^4 + ccyy}{b^2 - y^2}}$ (quand AC (a) est plus grand que BC (b) & en substituant cc, pour $a^2 - b^2$) ou $= \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{b^4 - ccyy}{b^2 - y^2}}$, quand AC (a) est moindre que BC (b) & que cc, est substitué pour $b^2 - a^2$.

De plus, par la nature de la courbe $DM = \frac{a}{b} \sqrt{bb - yy}$, donc la circonference du cercle décrite par DM est $\frac{pa}{rb} \sqrt{bb - yy}$, qui étant multiplié par l'élement de l'arc déja trouvé, donnera $\frac{pady}{rbb} \sqrt{\frac{b^4 \pm ccyy \times \overline{bb - yy}}{bb - yy}} = \frac{pady}{rbb} \sqrt{b^4 + ccyy}$, quand AC surpasse BC ; mais quand AC, est moindre que BC, elle est $= \frac{pady}{rbb} \sqrt{b^4 - ccyy}$; l'un & l'autre étant l'élement de la superficie d'un sphéroïde, formé par la révolution de la partie AM de l'élipse autour de la partie CD de l'axe, & peut se raporter à la quatriéme forme des Tables de M. *Cotes* ; car faisant $D = \frac{pa}{rbb}$, $z = y$, $n = 2$, $\theta = 0$,

$e = b^4$, $f = +cc$, la differentielle $Dz^{en+\frac{1}{2}n-1} dz \sqrt{e+fz^n}$, se changera en $\frac{pady}{rbb} \sqrt{b^4 \pm ccyy}$, & l'integrale $\frac{z^n}{n} DP + \frac{e}{nf}$ $DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$, en faisant $P \left(= \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{y} \sqrt{b^4 \pm ccyy}$, $R \left(= \sqrt{f}\right) = c$, ou $\sqrt{-cc}$, $T \left(= \sqrt{\frac{e+fz^n}{z^n}}\right) = \frac{1}{y}$ $\sqrt{b^4 \pm ccyy}$. $S \left(= \sqrt{\frac{e}{z^n}}\right) = \frac{b^2}{y}$, se changera en celle-ci $\frac{pay}{2rbb} \sqrt{b^4 \pm ccyy} + \frac{pab^2}{2rc} \left| \frac{yc + \sqrt{b^4 \pm ccyy}}{b^2} \right.$ qui est $\sqrt{b^4 + ccyy}$, la mesure d'un raport quand AC (a) surpasse BC (b), & il est $\sqrt{b^4 - ccyy}$, la mesure d'un angle quand AC (a) est moindre que Bc (b).

Fig. 52. On peut construire l'integrale dans le premier cas, de la façon suivante. Que F soit un des foyers, faites CF ($\sqrt{aa-bb} = \sqrt{cc} = c$, (suivant la nature de l'élipse) : CB (b) : : CB (b) : $CE = \frac{bb}{c}$, & tirez la ligne droite DE. Faites de même CE ($\frac{bb}{c}$) : DE ($\frac{1}{c} \sqrt{b^4 - ccyy}$) : : CD (y) : $KL = \frac{y}{bb}$ $\sqrt{b^4 + ccyy}$, à laquelle si vous ajoûtez LM, après l'avoir égalé à la mesure du raport qui se trouve entre DE ($\frac{1}{c}$ $\sqrt{b^4 + ccyy}$) $+ DC$ (y) & CE ($\frac{bb}{c}$) comparé au module CE ($\frac{bb}{c}$) ; c'est-à-dire, si vous prenez $LM = \frac{b^2}{c} \left| \frac{cy + \sqrt{b^4 + ccyy}}{b^2} \right.$; alors AC (a) est à $KM = KL + LM$ ($= \frac{y}{bb}$ $\sqrt{b^4 + ccyy} + \frac{b^2}{c} \left| \frac{cy + \sqrt{b^4 + ccyy}}{b^2} \right.$, comme un cercle décrit par le rayon AC (a) (lequel cercle égal $\frac{paa}{2r}$) est à la superficie du sphéroïde formé par la révolution de la partie AM de l'élipse $= \frac{pay}{2rbb} \sqrt{b^4 + ccyy} + \frac{pab^2}{2rc} \left| \frac{cy + \sqrt{b^4 + ccyy}}{b^2} \right.$, qui est l'integrale qu'il falloit construire.

Maintenant que le rayon d'un cercle égal à la superficie du sphéroïde, soit z, ce qui donne cette proportion CA (a) : KM : : un cercle décrit par CA, c'est-à-dire, $\frac{paa}{2r}$: à la

superficie du sphéroïde, suposée égale à un cercle $\frac{pzz}{2r}$, dont le rayon est z, & multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $\frac{pazz}{2r} = KM \times \frac{paa}{2r}$; ainsi $zz = KM \times a$; c'est-à-dire, un moyen proportionnel entre KM & AC (a) sera le rayon d'un cercle qui égalera la superficie du sphéroïde formé par la révolution de la partie AM de l'élipse.

Quand DC (y) devient égal à BC (b); alors DE devient BE; ainsi si vous faites CE ($\frac{bb}{c}$) : BE ($\frac{b}{c}\sqrt{bb+cc}$) :: BC (b) : $KL = \sqrt{bb+cc} = AC = a$, & que LM soit égal à la mesure du raport qui est entre AC (a) + BC (b) & CE ($\frac{bb}{c}$) au module CE ($\frac{bb}{c}$) on aura CA, est à KM, comme un cercle ayant CA pour rayon, est à la $\frac{1}{2}$ de la superficie de tout le sphéroïde.

Dans le dernier cas on fait la construction de l'integrale de cette maniere : prenez dans l'ordonnée DM, le point E; ensorte que la ligne CE étant tirée, soit égale à $\frac{bb}{c}$, ou à une troisiéme proportionnelle à CF (c) & CB (b); & faites CE ($\frac{bb}{c}$) : DE ($\frac{1}{c}\sqrt{b^4 - ccyy}$) :: DC (y) : $KL = \frac{y}{bb}\sqrt{b^4 - ccyy}$. Ensuite si à KL, vous ajoûtez LM égale à la mesure de l'angle DEC au module CE ($\frac{bb}{c}$); CA (a) est à KM, comme un cercle dont le diametre est CA (a) à la superficie du sphéroïde formé par la révolution de la partie AM de l'élipse autour de la partie DC de l'axe; ainsi un moyen proportionnel entre KM & CA, est le rayon d'un cercle égal à ladite superficie. *Fig. 53.*

Quand CD (y) devient égal à BC (b), tirez BG, perpendiculaire à BC, dans laquelle prenez le point e, de maniere que Ce étant tirés, elle soit $= EC$ ($\frac{bb}{c}$); ensuite si vous faites CE ou Ce ($\frac{bb}{c}$) : Be ($\frac{b}{c}\sqrt{bb - cc}$) :: AC (a) : $KL = \sqrt{bb - cc} = a$, & qu'à la même vous ajoûtiez LM, égale à la mesure de l'angle eCB, ayant pour module eC ($\frac{bb}{c}$); on aura CA, est à KM, comme un cercle ayant CA pour

rayon, eſt à la $\frac{1}{2}$ de la ſuperficie de tout le ſphéroïde.

EXEMPLE V.

71. *Trouver la ſuperficie d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une partie quelconque AM d'une hyperbole autour de ſon grand axe AP.*

Fig. 54. Que C ſoit le centre Cc, une aſymptote $AC=b$, un des demi-axes, & l'autre demi-axe $Ac=a$. Que $CP=b$, $PM=x$. Maintenant par la nature de la courbe $\frac{aa}{bb} \times \overline{yy-bb}=xx$, & $2aaydy=2bbxdx$, donc $dx=\frac{aaydy}{bbx}$, par conſequent $dx^2=\frac{a^4y^2dy^2}{b^4xx}$, & l'élement de l'arc AM $(=dx^2+dy^2)$ ſera $\frac{dy}{b}\frac{\sqrt{a^2yy+b^2yy-b^4}}{yy-bb}=\frac{dy}{b}\sqrt{\frac{ccyy-b^4}{yy-bb}}$, en ſubſtituant cc, pour a^2+b^2. De plus PM eſt $=\frac{a}{b}\sqrt{yy-aa}$ par la nature de la courbe ; ainſi la circonference décrite par PM ſera $\frac{pa}{rb}\sqrt{yy-aa}$, qui multiplié par l'élement de l'arc déja trouvé, donnera $\frac{pady}{rbb}\sqrt{\frac{\overline{ccyy-b^4}\times\overline{yy-bb}}{yy-bb}}=\frac{pady}{rbb}\sqrt{ccyy-b^4}$, qui eſt l'élement de la ſuperficie d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de la partie AM de l'hyperbole autour de l'axe AP, qui ſe raporte à la même forme dans les Tables de M. *Cottes*, que l'élement de la ſuperficie du ſphéroïde dans le dernier exemple. Car faiſant $D=\frac{pa}{rbb}$, $z=y$, $\theta=0$, $n=2$, $e=-b^4$, $f=cc$, $P=\frac{1}{y}\sqrt{ccyy-b^4}$, $R=e$, $T=\frac{1}{y}\sqrt{ccyy-b^4}$, $S=\frac{b^2}{y}$, on aura l'integrale de cette differentielle ainſi exprimée $\frac{pay}{2rbb}\sqrt{ccyy-b^4}-\frac{pab^2}{2rc}\left|\frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{b^2}\right.$. Faites maintenant $b=y$, alors la premiere partie $\frac{y}{bb}\sqrt{ccyy-b^4}$, de l'integrale ſera $=\sqrt{cc-bb}=a$; par conſequent elle doit être retranchée de cette premiere partie. De

plus en faisant $b=y$, la partie logarithmique $\frac{bb}{c} \mid \frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{bb}$ deviendra $\frac{bb}{c} \mid \frac{ab+bc}{bb}$, qu'il faut d'abord soustraire de $\frac{bb}{c} \mid \frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{bb}$, pour avoir la véritable partie logarithmique. Maintenant à cause que le logarithme du raport de bb à ab, $+bc$, ayant un signe affirmatif, est le même que le logarithme du raport de $ab+bc$ à bb, avec le signe negatif (*par la définition premiere, section 2. scholie 2.*) par conséquent la somme de $\frac{bb}{c} \mid \frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{bb}$ & de $\frac{bb}{c} \mid \frac{bb}{ab+bc}$, sera égal à la difference cherchée : mais le raport de $cy+\sqrt{ccyy-b^4}$ à bb, & le raport de bb à $ab+bc$, forment le raport de $cy+\sqrt{ccyy-b^4}$ à $ab+bc$, d'où il suit que la somme susdite sera $\frac{b5}{c} \mid \frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{ab+bc}$; par conséquent la véritable integrale qu'il faut construire sera $\frac{pay}{2rbb} \sqrt{ccyy-b^4} - \frac{pa^2}{2r} - \frac{pab^2}{2rc} \mid \frac{cy+\sqrt{ccyy-b^4}}{ab+bc}$, qu'on pourra faire de cette maniere.

Que F soit le foyer de l'hyperbole, par la nature de cette courbe CF ($\sqrt{aa+bb}$)$=c:CA\ (b)::CA(b):CE=\frac{bb}{c}$. Tirez EG perpendiculaire à CA, coupant l'asymptote en G. Dans l'angle CEG, inscrivez la droite $CH=CP$ (y) qu'il faut prolonger jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne PM au point I. Ensuite prenez KL égal à $PI-AC=\frac{y}{bb}\sqrt{ccyy-b^4}-a$: on aura par la similitude des triangles CEH, CPI ; CE ($\frac{bb}{c}$): EH ($\frac{1}{c}\sqrt{ccyy-b^4}$) :: CP (y) : $PI=\frac{y}{bb}\sqrt{ccyy-b^4}$. De plus, prenez LM égal à la mesure du raport qui est entre CH (y) $+EH$ ($\frac{1}{c}\sqrt{ccyy-b^4}$) & GC (b) $+GE$ ($\frac{ab}{c}$) au module CE ($\frac{bb}{c}$); & la superficie formée par la révolution de l'arc AM autour de l'axe AP, sera au cercle décrit par le rayon AC (a) $=\frac{paa}{2r}$ comme KM est à AC.

EXEMPLE VI.

72. *Trouver la superficie d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution d'une partie quelconque AM d'une hyperbole autour de son axe conjugué CPB.*

Fig. 55. Que C soit le centre, $CA=a$, le demi-axe tranſverſale, & $CB=b$, le demi-axe conjugué; F le foyer, $PM=x$, une ordonnée quelconque à CA, & $CP=y$, l'abſciſſe correſpondante.

Maintenant par la nature de la courbe $\frac{bb}{aa}\times\overline{xx-aa}=yy$; d'où $\frac{2bb}{aa}\times xdx=2ydy$; c'eſt-à-dire $\frac{bb}{aa}\times xdx=ydy$, & $bbxdx=aaydy$, & $dx=\frac{aaydy}{bbx}$, & $dx^2=\frac{a^4y^2dy^2}{b^4xx}$, & ſubſtituant $\frac{aayy+aabb}{bb}$ pour xx, on aura $dx^2=\frac{a^4bbyydy^2}{aab^4\times\overline{bb+yy}}=\frac{a^2y^2dy^2}{b^2\times\overline{bb+yy}}$. Donc $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{dy}{b}\sqrt{\frac{\overline{a^2+b^2}\times\overline{yy+b^4}}{bb+yy}}$: mais $x=\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}$, qui étant multiplié par $\frac{p}{r}$, donne pour produit $\frac{pa}{rb}\sqrt{bb+yy}$, qui eſt la circonference décrite par le point M, & ſi l'on multiplie l'élement de l'arc par cette circonſerence on aura $\frac{pady}{rbb}\sqrt{\frac{\overline{a^2+b^2}\times\overline{y^2+b^4}\times\overline{b^2+y^2}}{bb+yy}}=\frac{pady}{rbb}\sqrt{a^2+b^2y^2+b^4}$, & ſubſtituant cc, pour a^2+b^2, elle ſera $\frac{pady}{rbb}\sqrt{ccyy+b^4}$, élement de la ſuperficie formée par la révolution de l'arc AM, autour de ſon demi-diametre conjugué CP.

Cet élement differentiel étant le même que celui du premier cas de l'*exemple* 4. ſon integrale doit être la même que celle qu'on avoit trouvée dans cet exemple 4. *par exemple*, $\frac{pay}{2rbb}\sqrt{ccyy+b^4}+\frac{pab^2}{2rc}\,\Big|\,\frac{cy+\sqrt{cc+yyb^4}}{bb}$, qu'on peut conſtruire de cette façon.

Faites CF ($\sqrt{aa+bb}=c$) : CB (b) : : CB (b) : $CE=\frac{bb}{c}$.

Tirez

Tirez la ligne droite PE $(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy+b^4})$, ensuite faites CE $(\frac{bb}{c}):PE(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy+b^4})::PC(y):KL=\frac{y}{bb}\sqrt{ccyy+b^4}$, & prenez LM égal à la mesure du raport qui est entre PE $(\frac{1}{c}\sqrt{ccyy+b^4})+PC(y)$; c'est-à-dire, qui est entre $\frac{cy+\sqrt{ccyy+b^4}}{c}$, & CE $(\frac{bb}{c})$ au module CE $(\frac{bb}{c})$ & la superficie formée par la révolution de l'arc AM de l'hyperbole autour du demi-axe conjugué CB, sera au cercle décrit par le demi-diametre CA (a) (qui est $\frac{paa}{2r}$) comme la somme des lignes KL & LM, sont au même rayon CA (a).

EXEMPLE VII.

73. *Trouver la superficie formée par le mouvement de l'arc CM d'une hyperbole équilatere autour de l'asymptote ABP.*

Que A soit le centre, & que AB soit $=BC$; tirez parallelement à l'asymptote, AH; tirez AP, & menez PM parallele à CB: nommez maintenant AB, ou BC, a; AP, x; PM, y: ensuite par la proprieté de la courbe, on aura $aa=xy$; d'où il suit, que $x=\frac{aa}{y}$ & $\frac{aa}{x}=y$, qui étant differentié, donnera $dy=\frac{-aadx}{xx}$; par consequent $dy^2=\frac{a^4dx^2}{x^4}$. De plus $x=\frac{aa}{y}$ qui étant differentié donnera $\frac{aady}{yy}=dx$, & $\frac{a^4dy^2}{y^4}=dx^2$; donc $\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\frac{a^4dx^2}{x^4}+\frac{a^4dy^2}{y^4}}=\frac{dy}{yy}\sqrt{a^4+y^4}=Mm$, élement de l'arc CM, qui étant multiplié par $\frac{py}{r}$ donnera pour produit $\frac{pdy}{ry}\sqrt{a^4+y^4}=\frac{p}{r}y^{-1}dy\sqrt{a^4+y^4}$, qui est l'élement de la superficie formée par la révolution de l'arc CM. Cette differentielle peut se comparer à celle de la troisiéme forme des Tables de M. *Cottes*, & on aura l'integrale en faisant $D=\frac{p}{r}$, $z=y$, Fig. 56.

$\theta=0$, $n=4$, $e=a^4$, $f=y^4$, $P=\sqrt{a^4+y^4}$, $R=aa$, $T=\sqrt{a^4+y^4}$, & $S=yy$. Car alors elle deviendra $\frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4} - \frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Big|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}$. Mais cette integrale doit être corrigée, parce que l'absciſſe AP, x, augmente pendant que l'ordonnée PM, y, diminuë ; c'eſt pourquoi les ſignes doivent être changés ; c'eſt-à-dire, elle eſt $-\frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4} + \frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Big|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}$. De plus, puiſque l'absciſſe AP, x, commence au point A, & non pas au point B, la même integrale doit être corrigée par raport à ſon amplitude, ce qu'on peut faire ainſi. Faites $y=a$, alors la premiere partie de l'integrale ſera $\frac{1}{2}praa\sqrt{2}$, qu'il faut ajoûter à $-\frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4}$, & cette ſomme $\frac{1}{2}\frac{paa}{r}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\frac{p}{r}\sqrt{a^4+y^4}$, ſera la premiere partie de l'intégrale corrigée. De plus la partie logarithmique $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Big|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}$ doit être changée ; ce qu'on peut faire en faiſant $a=y$, car alors il viendra $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Big|\frac{\sqrt{2}+1}{1}$, qui étant ſouſtrait de $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Big|\frac{aa+\sqrt{a^4+y^4}}{yy}$, on aura $\frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Bigg|\frac{\frac{aa}{yy}+\sqrt{\frac{a^4+y^4}{yy}}}{\sqrt{2}+1}$, qui eſt la vraye partie logarithmique ; & par conſequent la vraye integrale ſera $\frac{paa}{2r}\sqrt{2} - \frac{p}{2r}\sqrt{a^4+y^4} - \frac{1}{2}\frac{p}{r}aa\,\Bigg|\frac{\frac{aa}{yy}+\frac{\sqrt{a^4+y^4}}{yy}}{\sqrt{2}+1}$ qu'on peut conſtruire de cette maniere.

Tirez AM & AC, & du point C, tirez CG, parallele à AM, coupant l'aſymptote AP, prolongée jûſqu'en G. Maintenant à cauſe des triangles ſemblables APM, ABF ; AP $(\frac{aa}{y})$: PM (y) : : AB (a) : $BF=\frac{yy}{a}$; d'où $\frac{1}{a}\sqrt{a^4+y^4}=AF$. De plus GC, étant parallele à AM, les triangles APM, GBC ſont ſemblables, & par conſequent PM (y) : AP $(\frac{aa}{y})$: :

$CB\ (a) : BG = \frac{a^3}{yy}$; d'où on tire $CG = \frac{a}{yy}\sqrt{a^4+y^4}$. Ensuite si vous faites $AH = AC\ (a\sqrt{2}) - AF\ (\frac{1}{a}\sqrt{a^4+y^4}) +$ la mesure du raport qui est entre $BG\ (\frac{a^3}{yy}) + GC (\frac{a}{yy}\sqrt{a^4+y^4})$, & $AC\ (a\sqrt{2}) + AB\ (a)$ (lequel raport est $= \frac{\frac{aa}{yy} + \sqrt{\frac{a^4+y^4}{yy}}}{\sqrt{2}+1}$) raportée au module $AB\ (a)$; alors la superficie formée par la révolution de l'arc CM, autour de l'asymptote AP, sera au cercle dont le rayon est $AB\ (a)$; c'est-à-dire, $= \frac{paa}{2r}$, comme

$$AH\ (a\sqrt{2} - \frac{1}{a}\sqrt{a^4+y^4} + a\left|\frac{\frac{a^3}{yy} + \frac{a\sqrt{a^4+y^4}}{yy}}{a\sqrt{2}+a}\right. \text{ est à } BC\ (a),$$

& par conséquent la valeur de AH, multipliée par $\frac{pa}{2r}$, sera égale à ladite superficie.

EXEMPLE VIII.

74. *Trouver la superficie formée par la révolution de l'arc infini PZ de la courbe logarithmique, autour de son asymptote AX.*

Que AP soit une ordonnée perpendiculaire à l'asymptote que vous nommerez y ; que TP soit une tangente au point P, & que la soutangente invariable AT soit $= a$; tirez pm, parallele à AT, & infiniment proche du point P. Fig. 57.

Présentement à cause de la similitude des triangles ATP, mpP, on a $AP\ (y) : TP\ (\sqrt{aa+yy}) :: mP\ (dy) : pP = \frac{dy}{y}\sqrt{aa+yy} =$ à l'élement de l'arc PZ, qui étant multiplié par $2y$, le produit $2dy\sqrt{aa+yy}$ sera l'élement d'un quarré dont le côté est égal au diametre d'un cercle égal à la superficie cherchée. *Par la scholie, art.* 67. suposons ce quarré $= \overline{AO}^2$.

Maintenant on peut raporter cet élement à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*, en mettant y, 2, 0, 2, aa, 1.

pour z, n, θ, D, e, f. De plus en mettant pour P, R, T, S; $\frac{1}{y}\sqrt{aa+yy}$, 1, $\frac{1}{y}\sqrt{aa+yy}$, & $\frac{a}{y}$; l'on aura pour la differentielle $2dy\sqrt{aa+yy}$, & pour l'integrale $y\sqrt{aa+yy}$ $+aa \left| \frac{y+\sqrt{aa+yy}}{a} \right.$.

Pour cônstruire cette integrale il faut observer que la ligne droite AO, est moyenne proportionnelle entre a & $\frac{y}{a}$ $\sqrt{aa+yy} + a \left| \frac{a+\sqrt{aa+yy}}{a} \right.$; & la quantité $\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$, est égale à la ligne droite PE perpendiculaire à la courbe en P, & bornée par l'asymptote en E : car à cause de la similitude des triangles TPA, APE; $TA\ (a) : TP\ (\sqrt{aa+yy})$ :: $AP\ (y) : PE = \frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$; & l'autre quantité $a \left| \frac{y+\sqrt{aa+yy}}{a} \right.$ est la mesure du raport qui est entre $AP+TP$, & AT au module AT, ou, par la similitude des triangles APF, APE, la mesure du raport qui est entre $AE+EP$ & AP, au même module AT. Ainsi cette integrale peut se construire de la maniere suivante.

Tirez PE ($\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$) perpendiculaire à la courbe au point P, terminée à l'asymptote en E; continuez l'ordonnée AP en L, de telle sorte que AL soit $= AE + EP$ ($\frac{yy}{a} + \frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$), & tirez LK dans le même sens de la courbe, c'est-à-dire, vers Z, que vous ferez $= EP$ ($\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy}$), & que cette même ligne LK coupe la courbe en M; enfin entre KM ($\frac{y}{a}\sqrt{aa+yy} + a \left| \frac{y+\sqrt{aa+yy}}{a} \right.$, & AT, trouvez une moyenne proportionnelle AO (LM, par la nature de la courbe, étant la partie logarithmique) qui sera le rayon d'un cercle égal à la superficie formée par la révolution de l'arc infini PZ.



EXEMPLE IX.*

75. *Trouver la superficie formée par la révolution de l'arc infini MZ ou AZ de la cissoïde de* Diocles, *autour de son asymptote AG.*

Tirez l'ordonnée *PM* perpendiculaire à l'asymptote, & *mp* infiniment proche de cette perpendiculaire. Ensuite faisant $AB = a$, $AN = x$, MN étant perpendiculaire à AB, l'élement Mm de l'arc MZ, sera $\frac{adx\sqrt{4a-3x}}{2 \times \overline{a-x}\sqrt{a-x}}$; qui multiplié par $\frac{p}{r} \times \overline{a-x} = \frac{p}{r} \times MP$, donnera pour l'élement de la superficie formée par la révolution déja expliquée de l'arc $MZ \frac{padx}{2r}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$. Fig. 42.

Maintenant on peut raporter cet élement à la onziéme forme des Tables de M. *Cottes*. Car faisant $z = x$, $\theta = 1$, $n = 1$, $D = \frac{pa}{2r}$, $e = 4a$, $f = -3$, $g = a$, & $b = -1$, la differentielle de cette onziéme forme $Dz^{\theta n-1} dz \sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}}$, se changera en $\frac{padx}{2r}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, & l'integrale $\frac{1}{nb} DPQ + \frac{eb-fg}{nfb} DR \left| \frac{R+T}{S.} \right.$, & faisant $P\,(\sqrt{e+fz^n}) = \sqrt{4a-3x}$, $Q\,(\sqrt{g+bz^n}) = \sqrt{a-x}$, $R\,(\sqrt{\frac{f}{b}}) = \sqrt{3}$, $T\,(\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}}) = \sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, $S\,(\sqrt{\frac{eb+fg}{bg+bz^n}}) = \sqrt{\frac{-a}{-a+x}}$ ou $\sqrt{\frac{a}{a-x}}$; se changera en $-\frac{pa}{2r} \times \sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x} - \frac{pa}{2r} \times \frac{a}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3a-3x}+\sqrt{4a-3x}}{\sqrt{a}} \right.$, qui est l'integrale de la differentielle donnée $\frac{padx}{2r}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, dans laquelle on peut changer les signes négatifs dans les deux parties.

On peut construire à present cette integrale de cette façon: coupant *MN* en *F*, & tirez *AFE*, coupant l'asymptote en *E*: faites *DB* moyen proportionnel entre *AB* & *NB*; de même, que l'angle *CAB* soit $= \frac{1}{3}$ d'un angle droit, & con-

tinuez l'asymptote jusqu'en B, coupant AC au point C; alors $BC = \frac{a}{\sqrt{3}}$; car $\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = 2\overline{BC}^2$; donc $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = 4\overline{BC}^2$; ainsi $\frac{\overline{AB}^2}{3} = \overline{BC}^2$; par conséquent $BC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. De plus $AF = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}$, & à cause de la similitude des triangles ANF, ABE; $AN\,(x) : AF\,(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}) :: NB\,(a-x) : FE = \frac{1}{2}\sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x}$, & $DC = \sqrt{\frac{4aa-3ax}{3}}$.

Mais la superficie formée par la révolution de l'arc infini MZ, est à un cercle $(= \frac{paa}{2r})$ dont le rayon est $AB\,(a)$, comme $2EF\,(\sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x})$ + la mesure du raport qui est entre BD, $(\sqrt{aa-ax})$ + $DC\,(\frac{\sqrt{4aa-3ax}}{3})$ & $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$ est au module $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$.

Faisant présentement $x=0$ dans l'integrale déja trouvée, on aura $\frac{pa}{2r} \times 2a + \frac{pa}{2r} \times \frac{a}{\sqrt{3}} \,\Big|\, \frac{\sqrt{3a}+2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, qui est l'integrale qui exprime la quantité de l'arc infini AZ, étant à un cercle dont le rayon est $AB\,(a)$ comme $2AB$ + la mesure du raport qui est entre $BA\,(a) + AC\,(\frac{2a}{\sqrt{3}})$ & $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$ au module BC, & la difference de ces integrales en retranchant $\frac{pa}{2r}$, *par exemple*, $2AB\,(2a) - EF\,(\sqrt{4a-3x} \times \sqrt{a-x})$ + la mesure du raport $BA(a) + AC\,(\frac{2a}{\sqrt{3}})$ à $BD\,(\sqrt{aa-ax})$ $+DC\,(\frac{\sqrt{4aa-3ax}}{3})$, le module étant $BC\,(\frac{a}{\sqrt{3}})$: donnera la quantité de l'arc fini AM. Car elle sera à un cercle ayant BA pour rayon, comme cette difference est au même rayon BA.

Quand la courbe fait sa révolution autour de la baze AB, M. *Cottes* dans ses *harmonia mensurarum*, donne la quantité de la superficie formée; mais l'opération est longue & difficile, les differentielles ne pouvant se raporter directement à aucune de ces Tables.



SECTION VI.

Usage du calcul differentiel & integral pour trouver le centre de gravité des figures.

PROBLEME.

76. *Trouver le centre de gravité d'une figure plane.*

Que AB soit l'axe, & MN une ordonnée à cet axe, & que mn soit une autre ordonnée infiniment proche de la premiere, & supofé que C soit le centre de gravité. *Fig.* 58.

Maintenant si on conçoit les parties infiniment petites $MmnN$, de la figure comme autant de petits poids suspendus à l'axe AB, par les differens points P, P, P, &c. & que le point de suspension soit en A, sommet de la figure, la distance du centre de gravité C à A, point de suspension, sera égale au quotient de la division de la somme des efforts de tous ces poids infiniment petits $MmnN$, divisée par la somme de toutes ces petites parties ou poids, c'est-à-dire, par l'aire de toute la figure. Ceci est évident suivant les principes de la méchanique ordinaire.

C'est pourquoi, nommant AP, x, MP, y, Pp, dx, la partie infiniment petite, ou le petit poids $MmnN$ sera $= 2ydx$, & leur somme totale sera $=$ à l'integrale de $2ydx$, & l'effort d'une de ces petites parties ou poids, sera $2ydx$, multiplié par $AP(x) = 2yxdx$, dont l'integrale divisée par l'integrale de $2ydx = AC$, distance du centre de gravité de A, sommet de la figure.

EXEMPLE PREMIER.

77. *Trouver le centre de gravité d'un triangle ADE.*

Tirez la ligne droite AB, coupant la baze DE en B, après *Fig.* 59.

quoi le triangle *ABD*, étant égal à *ABE*, chacun de ces triangles peuvent être résolus en une infinité de petites parties ou poids *MmpP*, *PNnp*, chacunes égales les unes aux autres de chaque côté de la ligne *AB* prise comme axe, & par conséquent le centre de gravité *C* doit être en quelqu'endroit de la ligne *AB*.

Maintenant nommez *AB*, a, *DE*, b, *AP*, x, *MN*, y; & tirez *AF* perpendiculaire à *DE* que vous nommerez c. Ensuite par la similitude des triangles *AMN*, *ADE*; *AB* (a): *DE* (b) : : *AP* (x) : $MN = \frac{bx}{a}$, de même à cause des triangles semblables *APQ*, *ABF*; on aura *AB* (a) : *AF* (c) : : *AP* (x) : $AQ = \frac{cx}{a}$; & comme *AP* (x) : $AQ\left(\frac{cx}{a}\right)$: : *Pp* (dx) : $Qq = \frac{cdx}{a}$; d'où il suit que l'effort $xydx = \frac{cbx^2dx}{a^2}$; dont l'integrale $= \frac{cbx^3}{3a^2}$, laquelle étant divisée par $\frac{cbx^2}{2a^2}$, aire du triangle *ADE*, le quotient sera $\frac{2}{3}x =$ à la distance du centre de gravité de la partie *AMN* du triangle *ADE*, depuis son sommet; & substituant a pour x, la distance du centre de gravité de tout le triangle *ADE*, depuis le sommet *A* sera $= \frac{2}{3}AB$ (a).

EXEMPLE II.

78. *Déterminer le centre de gravité C dans la parabole ordinaire.*

Fig. 58. Nommant *AP*, x, *MN*, y, *AB*, a, & le parametre p; alors $px = yy$; ainsi $y = \sqrt{px}$, donc $ydx = dx\sqrt{px}$; & par conséquent l'effort $xydx = xdx\sqrt{px} = xdxp^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, dont l'integrale sera $\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$; mais l'integrale de $ydx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ $=$ à l'aire de la portion *AMN* de la parabole; par conséquent divisant $\frac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$ par $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ le quotient $= \frac{3}{5}x = AC$; & substituant a pour x, la distance du centre de gravité *C* au sommet *A*, sera $= \frac{3}{5}AB$.



EXEMPLE III.

EXEMPLE III.

79. *Déterminer le centre de gravité C, dans toutes les paraboles de quelques degrés qu'elles soient.*

Dans ce cas $p^n x^m = y^r$, exprime la nature de toutes les paraboles de tous les degrés, d'où on tire $y = p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}}$, & par conséquent $ydx = p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m}{r}} dx$, & l'effort $xydx = p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+r}{r}} dx$, dont l'integrale $= \frac{r}{m+2n} p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+2r}{r}}$, qui étant divisée par l'integrale de $ydx = \frac{r}{m+n} p^{\frac{n}{r}} x^{\frac{m+n}{r}}$, le quotient sera $= \frac{m+r}{m+2r} x =$ à la distance du centre de gravité de la portion MAN du sommet A; & substituant a pour x, on aura $\frac{m+r}{m+2r} a = AC$.

EXEMPLE IV.

80. *Trouver le centre de gravité de l'espace ADE, compris entre deux paraboles égales AD, AE, se touchant l'une & l'autre au sommet A, & la ligne droite DE parallele à l'axe commun des deux paraboles.*

Faites $AP = x$, $PM = y$, & que le parametre soit $= 1$, ce qui donnera $\overline{AP}^2$ $(x^2) = (PM \times 1) = y$, par conséquent l'effort $xydx = x^3dx$ dont l'integrale est $\frac{1}{4} x^4$. Mais l'integrale de ydx est $\frac{1}{3} x^3$; donc $\frac{\frac{1}{4} x^4}{\frac{1}{3} x^3} = \frac{3}{4} x = AC$, distance du centre de gravité du sommet A. Fig. 60.

Les paraboles AME, AMD de quelques degrés qu'elles soient, auront cette équation $x^m = y^n$, qui exprimera le raport de AP à PM, par consequent $ydx = x^{\frac{m}{n}} dx$, & l'effort $xydx = x^{\frac{m+n}{n}} dx$, dont l'integrale est $\frac{nx^{\frac{m+2n}{n}}}{m+2n}$: mais

l'integrale de ydx est $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$; d'où il suit que le quotient de la division de la premiere de ces expressions par la derniere qui est $\frac{m+n}{m+2n} x$ sera $= AC$.

Exemple V.

81. *Déterminer le centre de gravité, d'un arc de cercle.*

Fig. 61. Que BE, corde de l'arc donné BDE, soit parallele au diametre FG, regardé comme un axe où sont suspendus les poids infiniment petits BM ; ainsi leurs efforts sont comme $BM \times PB$; & puisque le nombre & les efforts de ces petits poids de chaque côté du rayon AD, coupant également l'arc BDE, sont égaux, le centre de gravité sera en la ligne AD.

Maintenant que $AB = a$, $AP = HB = x$, & $Pp = Bm = dx$; alors PB $(\sqrt{aa-xx}) : AB\ (a) :: Bm\ (dx) : BM = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, & $BM \times PB = \sqrt{aa-xx} \times \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}} = adx = AB \times Bm$; & la somme des efforts, ou l'integrale de cette expression differentielle, sera $ax = AB \times BH$, qui étant divisée par l'arc BD, le quotient $\frac{AB \times BH}{BD}$, sera $=$ à la distance du centre de gravité C du centre A du cercle, & substituant le quart du cercle FD, pour BD, & le rayon FA ou AB pour BH ; alors $\frac{\overline{AB}^2}{FD}$ sera la distance du centre de gravité C du demi-cercle FDG du centre A.

Exemple VI.

82. *Déterminer le centre de gravité d'un secteur de cercle ABE.*

Fig. 62. Le centre de gravité est dans le rayon AD, qui coupe l'arc BE ; décrivez l'arc MPM avec une distance quelconque AP, & un autre arc mpm, infiniment proche du premier, après quoi l'effort de l'arc MPM multiplié par Mm,

ou Pp, sera l'effort du segment annulaire $mMPMm$, ou la differentielle de l'effort du secteur.

Maintenant que AB soit $= a$, $AF = b$, $BD = c$; alors l'effort de l'arc BDE $(2ab)$, sera à l'effort de l'arc MPM, comme le triangle ABE, est au triangle AMM, ou comme $\overline{AB}^2$ est à $\overline{AM}^2$, puisque les triangles ABE, AMM sont semblables; d'où il suit que l'effort de l'arc $MPM = \frac{2abx^2}{a^2} = \frac{2bx^2}{a}$, & l'effort du segment annulaire $mMPMm = \frac{2bxdx}{a}$, dont l'integrale, ou somme $\frac{2bx^3}{3a}$, divisée par la somme des poids, ou par l'aire ac du secteur, le quotient $\frac{2bx^3}{3aac}$ sera la distance du centre de gravité du secteur du cercle MPM.

EXEMPLE VII.

83. *Trouver le centre de gravité d'un segment quelconque MAm d'une hyperbole.*

Faites AC, a, CB, b, AP, x, PM, y, par la nature de la courbe on aura $\frac{bb}{aa} \times \overline{2ax + xx} = yy$; donc l'élement des efforts, sera $\frac{2b}{a} x^{\frac{3}{2}} dx\sqrt{2a + x}$, & celle de la difference des poids sera $\frac{2b}{a} x^{\frac{1}{2}} dx\sqrt{2a + x}$, dont chacune peut être comparée à la quatriéme forme des Tables de M. *Cottes*. Fig. 63.

Car faisant $\theta = 2$, $n = 1$, &c. on aura la somme des efforts $= \frac{\overline{-3aa + ax + 2xx}}{3} \times y + 2a^2b \,\Big|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a + x}}{\sqrt{2a}}$. De plus supposant $\theta = 1$, &c. la somme des poids sera $= \overline{a + x} \times y + 2ab \,\Big|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a + x}}{\sqrt{2a}}$. Ainsi divisant la premiere integrale par la derniere, on aura

$$\frac{\overline{-3aa + ax + 2xx} \times y + 2a^2b \,\Big|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a + x}}{\sqrt{2a}}}{\overline{a + x} \times y + 2ab \,\Big|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a + x}}{\sqrt{2a}}}$$

$=$ à la distance du centre de gravité du sommet D.

Pour construire maintenant cette expression, faites CB

$(b) : CA\ (a) :: PM\ (y) : CF = \frac{ay}{b}$. Faites auſſi $PM\ (y) : CB$ $(b) :: CA\ (a) : CG = \frac{ab}{y}$; enſuite prenez CH égal à la meſure du raport de $CA\ (a)$ à $FP\ \left(a + x - \frac{ay}{b}\right)$; lequel raport eſt $=$ à la raiſon doublée de $\sqrt{2a}$, à $\sqrt{x} - \sqrt{2a+x}$; cela fait, ſi vous faites comme $3PH\ \left(3a + 3x - \frac{3ab}{y} \,\middle|\, \frac{a}{a + x - \frac{ay}{b}}\right)$: $2\,CF\left(\frac{2ay}{b}\right) :: CF\left(\frac{ay}{b}\right) : CZ = \dfrac{4ax + 2xx}{3a + 3x - \frac{3ab}{y} \,\middle|\, \frac{a}{a + x - \frac{ay}{b}}}$, cette quatriéme proportionelle ſera égale à la diſtance du centre de gravité Z du centre C ; car ſi on retranche CA (a), il viendra $\dfrac{4ax + 2xx}{3a + 3x - \frac{3ab}{y} \,\middle|\, \frac{a}{a + x - \frac{ay}{b}}} - a =$

$$\frac{-\overline{3aa + ax + 2xx} \times y + 2a^2b \,\middle|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a+x}}{\sqrt{2a}}}{\overline{a + x} \times y + 2ab \,\middle|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a+x}}{\sqrt{2a}}},$$

qui eſt la même expreſſion qu'on avoit trouvée en premier lieu.

Scholie.

84. La diſtance du centre de gravité d'un ſegment d'élipſe, ou de cercle à ſon ſommet, s'exprime ainſi ;

$$\frac{-\overline{3aa - ax + 2xx} \times y - 2a^2b \,\middle|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a-x}}{\sqrt{2a}}}{\overline{a - x} \times y - 2ab \,\middle|\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a-x}}{\sqrt{2a}}},$$

étant la même que celle du centre de gravité de l'hyperbole, ne differant ſeulement que par le changement de quelques ſignes, & la meſure du raport dans l'hyperbole ſe changeant dans le cercle & dans l'élipſe en la meſure d'un angle, parce que R $(= \sqrt{-f}) = \sqrt{-1}$ eſt négatif.

EXEMPLE VIII.

85. *Trouver le centre de gravité de l'espace exterieur AMmaA de l'hyperbole.*

Que le demi-diametre conjugué $BC=b$, & le demi-transversale $AC=a$, l'abscisse $CP=y$, & l'ordonnée correspondante $PM=x$. Par la proprieté de la courbe on aura $\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}=yy$, ainsi $x=\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}$; donc $\frac{2a}{b}dy\sqrt{bb+yy}$ sera l'élement des petits poids, & $\frac{2a}{b}ydy\sqrt{bb+yy}$, celui des efforts; & par la comparaison de cette differentielle avec la troisiéme forme des Tables de M. *Cottes*, faisant $\theta=1$ $n=2$, *&c.* l'integrale se trouvera $=\frac{2a}{3b}\,|\,\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}$; & faisant $y=0$, la même deviendra $2ab^2$, qu'il faut soustraire de cette integrale, le reste $\frac{2a}{3b}\,|\,\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}-2ab^2$, sera l'integrale de la differentielle $\frac{2a}{b}ydy\sqrt{bb+yy}$; & l'integrale de $\frac{2a}{b}dy\sqrt{bb+yy}$, comparée à la quatriéme forme, en faisant $\theta=0$, $n=2$, *&c.* sera $\frac{ay}{b}\sqrt{bb+yy}+ab\,\left|\,\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}\right.$, par laquelle divisant l'integrale qu'on vient de trouver, le quotient

$$\frac{\frac{2a}{3b}\times\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}-2ab^2}{\frac{ay}{b}\sqrt{bb+yy}+ab\,\left|\,\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}\right.}=$$

$$\frac{2\times\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}-2b^3}{3y\sqrt{bb+yy}+3bb\left|\frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}\right.}$$, sera $=$ à la distance du centre de gravité Z du centre C.

Pour construire maintenant cette expression, faites AC $(a):PM\ (\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}=x)::BC\ (b):CR=\sqrt{bb+yy}$. De plus faites $PM\ (\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}):AC\ (a)::BC\ (b):CS=$ Fig. 64.

$\frac{b^3}{\sqrt{bb+yy}}$, & faites encore PM ($\frac{a}{b}\sqrt{bb+yy}$) : AC (a) :: CS ($\frac{b^3}{\sqrt{bb+yy}}$) : $CT = \frac{b^3}{bb+yy}$.

Que CR, CT tendent vers le même endroit, par exemple, de C vers PM; mais que CS se meuve dans un sens contraire; ensuite prenez CN égal à la mesure du raport qui est entre CB (b) & ER ($\sqrt{bb+yy}-y$) comparé au module CS ($\frac{b^3}{\sqrt{bb+yy}}$) qui s'exprime ainsi $\frac{bb}{\sqrt{bb+yy}} \,|\, \frac{b}{\sqrt{bb+yy}-y}$; ce qui étant fait, faites $3PN$ ($3y+\frac{3b^3}{\sqrt{bb+yy}} \,|\, \frac{b}{\sqrt{bb+yy}}$) : $2TR$ ($2\sqrt{bb+yy}-\frac{2b^3}{bb+yy}$) :: CR ($\sqrt{bb+yy}$) est à une quatriéme proportionelle $= \frac{2\times\overline{bb+yy}^{\frac{3}{2}}-2b^3}{3y\sqrt{bb+yy}+3bb \,|\, \frac{y+\sqrt{bb+yy}}{b}} = CZ$, distance cherchée.

Remarquez que la construction de ces deux exemples est la même que celle qu'a donnée M. *Cottes* dans son *Harmonia mensurarum*, pag. 25, 26. part. premiere.

EXEMPLE IX.

86. *Trouver le centre de gravité d'un cone droit & d'une piramide.*

Fig. 43. Le centre de gravité est quelque part dans l'axe AB. Si on fait maintenant $AP=x$, $BC=a$, $AB=b$, on aura $PM=\frac{ax}{b}$, & le raport du rayon à la circonference étant celui de r à p, la differentielle du petit poids $=\frac{paaxx}{2rbb}dx$, & l'effort de ce même petit poids sera $\frac{paax^3}{2rbb}dx$, par conséquent la somme des efforts $\frac{paax^4}{8rbb}$ divisée par la somme des poids $\frac{paax^3}{6rbb}$, donnera $\frac{3}{4}x=AG$, distance du centre de gravité de la partie $AMPm$ du cone; donc $\frac{3}{4}AB$, sera la distance du centre

de gravité de tout le cone depuis le sommet *A*.

Vous trouverez de la même maniere que la distance du centre de gravité d'une piramide depuis son sommet, est au $\frac{3}{4}$ de son axe depuis ce même sommet.

EXEMPLE X.

87. *Trouver le centre de gravité d'un segment quelconque de la sphere.*

Que $AC=r$, $AP=x$, alors la differentielle des poids sera $pxdx-\frac{px^2dx}{2r}$, & celle des efforts sera $px^2dx-\frac{px^3dx}{2r}$, & la somme des efforts sera $\frac{px^3}{3}-\frac{px^4}{8r}$, qui étant divisée par $\frac{pxx}{2}-\frac{px^3}{6r}$, somme des poids, le quotient $\frac{8rx-3xx}{12r-4x}$ sera la distance du centre de gravité du point *A* du segment d'une sphere formée par la révolution d'un demi-segment *AMP*, du demi-cercle autour de *AP*. Fig. 44.

COROLLAIRE.

88. Il suit de-là que le centre de gravité de la demi-sphere est $\frac{5}{8}r$; car dans cet exemple x devient $=r$.

EXEMPLE XI.

89. *Trouver le centre de gravité d'un conoïde parabolique formé par la révolution d'une parabole autour de son axe.*

Dans cet exemple $\frac{pxdx}{2}$ est la differentielle des poids; & $\frac{px^2dx}{2}$, celle des efforts, r étant le demi-parametre, la somme des poids est $\frac{px^2}{4}$, celle des efforts est $\frac{px^3}{6}$, qui étant divisé par $\frac{px^2}{4}$, le quotient sera $\frac{2}{3}x$ distance du centre de gravité de la parabole ordinaire depuis son sommet *A*.

EXEMPLE XII.

90. *Trouver le centre de gravité d'un ſolide formé par la révolution de l'eſpace parabolique AMBD, autour d'une ligne BT parallele à ſon axe.*

Fig. 65. Que BD ou $AT = r$, $AP = x$, $PM = y$, on aura $\frac{pr}{2} - py + \frac{pyy}{2r} =$ à un cercle décrit par MQ comme rayon, & par conſéquent ſera $px^{\frac{1}{2}}dx - \frac{pxdx}{2r}$ pour la differentielle des poids, & $px^{\frac{3}{2}}dx - \frac{px^2dx}{2r}$ pour celle des efforts. L'integrale de la premiere expreſſion ou la ſomme des poids eſt $\frac{2}{3}px^{\frac{3}{2}} - \frac{px^2}{4r}$, & la ſomme des efforts eſt $\frac{2}{5}px^{\frac{5}{2}} - \frac{px^3}{6r}$, qui étant diviſée par la ſomme des poids, le quotient ſera $\frac{24rx^{\frac{3}{2}} - 10xx}{40rx^{\frac{1}{2}} - 15x} = \frac{24rx - 10yx}{40r - 15y}$, diſtance du centre de gravité de la partie du ſolide formée par APM; & quand x devient $= a$ & $y = r$, la diſtance ſera $= \frac{14}{25}a$.

EXEMPLE XIII.

91. *Trouver le centre de gravité d'un conoïde hyperbolique ABG, formé par la révolution de l'eſpace hyperbolique ABG autour de l'axe tranſverſale aCAP.*

Fig. 41. Nommant maintenant AC, $2b$, AB, a, & l'ordonnée BG, r, l'élement des poids ſera $\frac{prxxdx + 2bprxdx}{2aa + 4ab}$, & celui des efforts, A étant le centre du mouvement, ſera $\frac{prx^3dx + 2bprxxdx}{2aa + 4ab}$ dont l'integrale ſera $\frac{prx^4}{8aa + 16ab} + \frac{bprx^3}{3aa + 6ab} = \frac{3prx^4 + 8bprx^3}{24aa + 48ab}$, qui étant diviſé par $\frac{prx^3 + 3bprxx}{6aa + 12ab} = \frac{4prx^3 + 12bprxx}{24aa + 48ab}$, ſomme des poids,

poids, le quotient $\frac{3xx+8bx}{4x+12b}$, sera la distance du centre de gravité du point A dans l'axe AP du conoïde formé par la révolution de la partie AMP de l'hyperbole; & quand $x=a$, la distance du centre de gravité de tout le solide depuis le sommet A, sera $\frac{3aa+8ab}{4a+12b}$; d'où il suit que $3a+8b : 4a+12b :: a : \frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

EXEMPLE XIV.

92. *Trouver le centre de gravité d'un conoïde hyperbolique formé par la révolution de l'espace hyperbolique AMBCD autour de CD, moitié de l'axe conjugué.*

Faisant les mêmes supositions que dans l'*art.* 61. l'élement ou la difference des poids sera $\frac{aapx^2dx + aabbpdx}{2bbr}$, & celui des efforts par raport à AC est $\frac{aapx^3dx + aabbpxdx}{2bbr}$, dont l'integrale sera $\frac{aapx^4}{8bbr} + \frac{aabbpxx}{4bbr} = \frac{px^4yy + 2bbpx^2y^2}{8rx^2 + 8bbr}$, en substituant $\frac{bbyy}{xx+bb}$ pour aa: qui étant divisé par la somme des poids, le quotient $\frac{3x^3 + 6bbx}{4xx + 12bb}$, sera la distance du centre de gravité du conoïde formé par l'espace $ACPM$ autour de la ligne ou axe AC. Et quand x devient $=b$, on aura $\frac{9}{16}b$, pour la distance de ce même centre de gravité. Fig. 48.

C'est pourquoi le centre de gravité de tout le conoïde, est tellement situé dans l'axe AC, que la partie depuis le centre C, jusqu'au centre de gravité, est à AC comme 9 à 16.

EXEMPLE XV.

93. *Trouver le centre de gravité d'un demi-sphéroïde formé par la révolution du demi-espace éliptique AMca, autour de l'axe Aa.*

Faites $AC=a$, $Cc=r$, $AP=x$, $PM=y$; alors quand PC devient x, la differentielle des poids sera $\frac{pyydx}{2r}$; mais par Fig. 40.

la nature de l'élipſe, *AP* étant $= x$, $yy : 2ax - xx :: rr : aa$; d'où on tire $yy = \frac{2arrx - rrxx}{aa}$; & ſubſtituant cette valeur dans $\frac{pyydx}{2r}$, on aura $\frac{2aprxdx - prx^2dx}{2aa}$; & multipliant par x, la differentielle des efforts ſera $\frac{2aprxxdx - prx^3dx}{2aa}$, dont l'integrale *par exemple* $\frac{prx^3}{3a} - \frac{prx^4}{8aa} = \frac{8aprx^3 - 3prx^4}{24aa}$, qui étant diviſée par $\frac{12aprxx - 4prx^3}{24aa}$ ſomme des poids, le quotient $\frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$, ſera la diſtance du centre de gravité de la partie du ſolide formé par l'eſpace *APM* du point *A*; & quand x devient $= a$, la même diſtance ſera $\frac{5}{8} a$, c'eſt-à-dire, que le centre de gravité du demi-ſphéroïde eſt diſtante de *A* de $\frac{5}{8} a$.





SECTION VII.

Usage du calcul differentiel & integral dans la recherche des centres de percussion des figures.

DÉFINITION.

94. LE centre de *percussion* ou d'*oscillation* d'une figure en mouvement, est le point dans lequel toutes les forces de cette figure sont regardées comme étant toutes réunies en un seul point, de maniere que si cette figure rencontroit un obstacle contraire à la direction de son mouvement, elle choqueta cet obstacle dans ce point avec plus de force qu'elle ne feroit dans tout autre point de la figure.

Pour cet effet il est nécessaire que les parties de la figure changent constament la disposition qu'elles ont à se mouvoir, & qu'elles séparent leur quantité de mouvement, non comme dans les centres de gravité, en raison des espaces parcouruës; mais en raison composée de leurs vitesses, & des distances de ces centres réciproquement proportionnels à ces mêmes vitesses, ou, ce qui est la même chose, qu'elles séparent leur quantité de mouvement en parties égales à chaque côté de ce point d'oscillation. C'est pourquoi le centre de percussion est par raport aux vitesses, ce que le centre de gravité est à l'égard des petits poids; & comme pour trouver le centre de gravité, on divise la somme des efforts par la somme des poids; ainsi pour trouver le centre de percussion, il faut multipliet la somme des efforts par des lignes droites égales ou proportionnelles aux espaces mûs, & diviser le produit par la somme des efforts; d'où il suit :

Que la regle generale pour trouver le centre de percussion d'une figure qui se meut autour d'un point donné ou axe, est de multiplier toutes les parties qui composent la

figure (c'est-à-dire, toute son aire ou toute sa solidité) considerées comme autant de poids, par les quarrés de leurs distances du point de suspension, & diviser le produit par celui des mêmes poids multipliés par les distances de l'axe du mouvement, & le quotient sera la distance du centre de percussion du point ou axe de mouvement.

Fig. 59. Il suit de-là que si $AP=x$, $MN=2y$, $Pp=dx$, l'effort de tout le petit poids $MNnm$, sera $=2yxdx$. Par conséquent la distance du centre de percussion du point A, est égale à l'integrale de $2yx^2dx$, divisée par l'integrale de $2yxdx$. Donc si par l'équation de la courbe vous trouvez la valeur de y, que vous substituez dans ces differentielles, & qu'ensuite vous en preniez les integrales, vous trouverez la distance du centre de percussion depuis le point A, ce qui sera éclairci par les exemples suivants.

Exemple premier.

95. *Trouver le centre de percussion d'une ligne droite AB, qui se meut autour de son extremité A.*

Fig. 65. Si on conçoit maintenant cette ligne comme divisée en une infinité de petites parties égales Pp (dx), AB étant a, & AP, x, il est évident qu'en tems égaux elles décriront des arcs égaux de cercles concentriques, qui seront les uns aux autres comme les distances du point A; mais la vîtesse avec laquelle les mêmes arcs sont décrits, sont proportionelles aux mêmes arcs; ainsi les vîtesses sont comme les distances.

Maintenant xdx sera l'élement ou differentielle des efforts, qui multiplié par x, qui représente les vîtesses, donnera x^2dx pour la differentielle des forces, dont l'integrale $\frac{x^3}{3}$ étant divisée par la somme des efforts $\frac{x^2}{2}$, le quotient $\frac{2}{3}x$ sera la distance du centre de percussion de la partie AP de la ligne depuis le point A, & le centre de percussion de toute la ligne sera $\frac{2}{3}a$ faisant $x=a$.



EXEMPLE II.

96. *Trouver le centre de percussion d'un rectangle RISH, se mouvant autour d'un de ses côtés RI.*

Si $RI = SH = a$, $AP = x$, alors $Pp = dx$, sera l'élement de l'aire, & un des petits poids sera $= adx$, & son effort sera $axdx$; d'où il suit que l'integrale de ax^2dx, divisée par l'integrale de $axdx$ (ou $\frac{\frac{1}{3}ax^3}{\frac{1}{2}ax^2}$) le quotient $\frac{2}{3}x$, sera la distance du centre de percussion de la partie $RCDI$ du parallelograme depuis le côté RI; & si au lieu de x on substituë la hauteur $RS = b$ de tout le triangle, la distance du centre de percussion depuis le côté RI sera $= \frac{2}{3}b$. Fig. 66.

EXEMPLE III.

97. *Trouver le centre de percussion d'un triangle isocelle SAH, se mouvant autour de la ligne RI, passant par le sommet A, & parallele à la baze SH.*

Que la hauteur AE soit $= a$, $AP = x$, $EH = \frac{1}{2}b$, $PL = y$. Ensuite $AP\ (x) : PL\ (y) :: AE\ (a) : EH = \frac{1}{2}b$. D'où il suit que $ay = \frac{1}{2}bx$, & $y = \frac{bx}{2a}$; mais l'integrale de yx^2dx = l'integrale de $\frac{bx^3dx}{2a}$ est $= \frac{bx^4}{8a}$, & l'integrale de $yxdx$ = à l'integrale de $\frac{bx^2dx}{2a}$ est $= \frac{bx^3}{6a}$; par conséquent l'integrale de yx^2dx, divisée par l'integrale de $yxdx$, ou $\frac{6abx^4}{8abx^3} = \frac{6}{8}x = \frac{3}{4}x$. Fig. 66.

Mais si vous substituez pour x, toute la hauteur $AE = a$, la distance du centre de percussion de tout le triangle ASH, depuis le sommet A, sera $\frac{3}{4}a = \frac{3}{4}AE$.

EXEMPLE IV.

98. *Trouver le centre de percussion d'un triangle isocelle SAH qui se meut autour de sa baze SH.*

Que tout soit comme dans l'exemple précedent, ce qui Fig. 66.

donne $PE = a - x$; d'où il suit que l'integrale de $yx^2dx =$ à l'integrale de $\frac{bxdx}{2a} \times \overline{a-x}^2$ ($=$ à l'integrale de $\frac{1}{2} abxdx - bx^2dx + \frac{bx^3dx}{2a}$) est $= \frac{1}{4} abx^2 - \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{8a}$; & l'integrale de $yxdx =$ à l'integrale de $\frac{bxdx}{2a} \times \overline{a-x}$ ($=$ à l'integrale de $\frac{1}{2} bxdx - \frac{bx^2dx}{2a}$) $= \frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a}$. Par conséquent le quotient de l'integrale de yx^2dx, divisée par l'integrale de $yxdx$

$$\left(= \frac{\frac{1}{4} abx^2 - \frac{1}{3} bx^3 + \frac{bx^4}{8a}}{\frac{1}{4} bx^2 - \frac{bx^3}{6a}} \right)$$

$$\text{est} = \frac{\dfrac{24a^2bx^2 - 32abx^3 + 12bx^4}{96a}}{\dfrac{6abx^2 - 4bx^3}{24a}}$$

$$= \frac{6a^2bx^2 - 16abx^3 + 6bx^4}{12abx^2 - 8abx^3} = \frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x} = \text{à la di-}$$

stance du centre de percussion du segment $SZVH$, depuis la baze SH.

Si maintenant pour x, vous substituez a, vous aurez la distance du centre de percussion de tout le triangle $SAH = \left(\frac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6a - 4a} \right) = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} AE$.

EXEMPLE V.

99. *Trouver le centre de percussion d'un espace parabolique qui se meut autour d'une ligne passant par le sommet de la parabole parallele à sa baze.*

Nommant maintenant l'abscisse x, toute la hauteur a ; la differentielle des efforts sera $x^{\frac{3}{2}} dx$, & celles des forces sera $x^{\frac{5}{2}} dx$, dont l'integrale est $\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}$, qui étant divisée par $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ somme des efforts, le quotient sera $\frac{5}{7} x =$ à la distance du centre de percussion de la partie de la parabole dont la hauteur est x, depuis le sommet ; & quand x devient égal à a,

la distance du centre de percussion de toute la parabole sera $\frac{5}{7}a$.

SCHOLIE.

100. Si on demande le centre de percussion d'une parabole d'un degré quelconque, on aura $\frac{2m+1}{3m+1}a =$ à la distance du centre de percussion depuis le sommet ; dans cette expression generale, m est l'exposant de la puissance de l'ordonnée de la parabole : De maniere que si $m=2$, la distance sera $\frac{5}{7}a$, comme dans la parabole ordinaire, si $m=3$, comme dans la parabole cubique, la distance sera $=\frac{7}{10}a$, &c.

EXEMPLE VI.

101. *Trouver le centre de percussion d'un espace parabolique, qui se meut autour de la baze DD.*

Multipliez la differentielle des poids $x^{\frac{1}{2}}dx$, par $a-x$, *Fig. 58.*
& on aura $ax^{\frac{1}{2}}dx - x^{\frac{1}{2}+1}dx =$ à la differentielle des efforts, qui étant encore multipliés par $a-x$, donnera pour la differentielle des forces $aax^{\frac{1}{2}}dx - 2ax^{\frac{1}{2}+1}dx + x^{\frac{1}{2}+2}dx$, dont l'integrale $\frac{2}{3}aax^{\frac{1}{2}+1} - \frac{4}{5}ax^{\frac{1}{2}+2} + \frac{2}{7}x^{\frac{1}{2}+3} = \frac{70aax^{\frac{1}{2}+1} - 84ax^{\frac{1}{2}+2} + 30x^{\frac{1}{2}+3}}{105.}$ étant divisée par la somme des efforts $\frac{10ax^{\frac{1}{2}+1} - 6x^{\frac{1}{2}+2}}{15}$, le quotient sera $\frac{35aa - 42ax + 15xx}{35a - 21x}$, distance du centre de percussion de l'espace $DMND$, depuis la baze DD, & substituant x pour a, la distance du centre de percussion de toute la parabole depuis la baze DD, sera $\frac{4}{7}a = \frac{4}{7}AB$.



EXEMPLE VII.

102. *Trouver le centre de percussion d'un cylindre AB, qui se meut autour de son extrêmité A.*

Fig. 67. Il est clair que les vîtesses de toutes les petites parties égales de ce solide, seront les unes aux autres, à cause des tems égaux, dans les mêmes raisons que les espaces *rm*; c'est-à-dire, comme les arcs décrits dans leur mouvement, ou comme les rayons, ou les distances du point de suspension : présentement que l'axe *AB* du cylindre soit $=a$, une partie quelconque $AP=x$, la circonference de la baze $=p$, & son rayon $=r$; alors la differentielle des efforts sera $\frac{prxdx}{2}$, & celle des forces $\frac{prx^2dx}{2}$, dont l'integrale est $\frac{prx^3}{6}$, qui étant divisée par la somme des efforts $=\frac{prx^2}{4}$, le quotient $\frac{2}{3}x$ sera la distance du centre de percussion de la partie du cylindre, dont la hauteur ou distance du point *A*, est *AP*, & $\frac{2}{3}a$, sera la distance du centre de percussion de tout le cylindre de ce même point *A*.

EXEMPLE VIII.

103. *Trouver le centre de percussion d'un cylindre qui se meut autour du point R dans l'axe prolongé.*

Fig. 67. Faites $RB=a$, $RA=b$, $AP=x$, alors $RP=b+x$, & $AB=a-b$, par conséquent $\frac{brpdx+prxdx}{2}$ est l'élement des efforts; mais les vîtesses des petits poids égaux du solide, sont les unes aux autres comme les arcs décrits du point *R* par ces mêmes poids; ainsi les forces sont les unes aux autres comme les lignes droites qui forment le trapeze décrit par le cylindre. D'où il suit que multipliant cette expression differentielle des efforts par $b+x$, on aura $\frac{bbprdx+2bprxdx+prx^2dx}{2}=$ à la differentielle des forces dont l'integrale est $=\frac{bbprx}{2}+\frac{bprx^2}{2}+\frac{prx^3}{6}$, qui étant divisée par la somme des efforts $=\frac{bprx}{2}+\frac{prx^2}{4}$, donnera

donnera pour quotient $\frac{6bb+6bx+2xx}{6b+3x}$, fera la diftance du centre de percuffion de la partie dont la hauteur eft AP, depuis le point R, & $\frac{2aa+2ab+2bb}{3a+3b}$, fera la diftance du centre de percuffion de tout le cylindre depuis le point R; car alors x devient $=a-b$. De-là il eft aifé de trouver dans quelle partie d'un cylindre de bois, une perfonne doit fraper, afin de donner le plus grand coup qu'il eft poffible; fupofant que AR reprefente le bras de la perfonne, & AB le bâton.

EXEMPLE IX.

104. *Trouver le centre de percuffion d'un cone qui fe meut autour de fon fommet A.*

La differentielle des efforts eft $\frac{prx^3dx}{2aa}$, & celle des forces eft $\frac{prx^4dx}{2aa}$, dont l'integrale $\frac{prx^5}{10aa}$, étant divifée par la fomme des efforts $=\frac{prx^4}{8aa}$, le quotient $\frac{4}{5}x$ fera la diftance du centre de percuffion de la partie du cone, dont la hauteur eft AP depuis le fommet A, & $\frac{4}{5}a$, fera la diftance du centre de percuffion de tout le cone depuis le fommet A. Fig. 43.

Remarquez que ce centre de percuffion eft le même que celui de gravité du complement de la parabole cubique; les forces étant comme les lignes qui forment ce complement.

EXEMPLE X.

105. *Trouver le centre de percuffion d'une fphere qui fe meut autour d'un point A à l'origine du diametre AD.*

Supofez le rayon $=r$, la circonference $=p$, & $AP=x$; vous aurez pour la differentielle des efforts $px^2dx-\frac{px^3dx}{2r}$, & pour celle des forces $px^3dx-\frac{px^4dx}{2r}$, dont l'integrale fera $=\frac{px^4}{4}-\frac{px^5}{10r}$; qui étant divifée par la fomme des efforts $=\frac{px^3}{3}-\frac{px^4}{8r}$; le quotient $\frac{30rx-12xx}{40r-15x}$, fera la diftance du centre Fig. 44.

de percussion du segment de la sphere, dont la hauteur est x, depuis le point A; & $\frac{6}{5}r$, sera la distance du centre de percussion de toute la sphere depuis ce même point.

EXEMPLE XI.

106. *Trouver le centre de percussion d'un conoïde parabolique qui se meut autour de son sommet.*

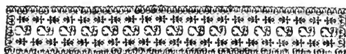
La differentielle des efforts sera $\frac{px^2dx}{2r}$, & celle des forces $\frac{px^3dx}{2r}$ dont l'integrale sera $= \frac{px^4}{8r}$ qui étant divisée par $\frac{px^3}{6r}$, le quotient $\frac{3}{4}x$, sera la distance du centre de percussion, de la partie du conoïde dont la hauteur est x, depuis le sommet, & $\frac{3}{4}a$, sera la distance du centre de percussion de tout le conoïde depuis le sommet.

EXEMPLE XII.

107. *Trouver le centre de percussion d'un spheroïde qui se meut autour d'un bout de son axe transversale.*

Les mêmes choses étant suposées que dans l'*art.* 93. La differentielle des efforts sera $\frac{2aprx^2dx - prx^3dx}{2aa}$, & celle des forces sera $\frac{2aprx^3dx - prx^4dx}{2aa}$, dont l'integrale $\frac{prx^4}{4a} - \frac{prx^5}{10aa}$, divisée par la somme des efforts $= \frac{prx^3}{3a} - \frac{prx^4}{8aa}$, le quotient $\frac{30ax - 12xx}{40a - 15x}$, sera la distance du centre de percussion de la partie du sphéroïde, dont la hauteur est x depuis le point du mouvement, & $\frac{5}{6}a$ sera la distance cherchée de toute la spheroïde.





SECTION VIII.

Résolution de divers Problemes par le calcul differentiel & integral.

PROBLEME PREMIER.

108. *Trouver une ligne, dans laquelle la soutangente soit égale à la demie-ordonnée.*

DAns tous les cas il est évident que l'expression de la soustangente est $\frac{ydx}{dy}$; ainsi par la condition du probleme $\frac{ydx}{dy} = y$, & $ydx = ydy$, c'est-à-dire, $dx = dy$, & l'integrale de chaque membre sera $x = y$. D'où il suit que la ligne cherchée est l'hypotheneuse d'un triangle rectangle, en regardant comme son axe la ligne coupant en deux cet angle droit : mais si x est l'arc d'un cercle, alors la ligne cherchée sera une cycloïde.

PROBLEME II.

109. *Trouver une courbe, dont la soutangente égale deux fois le quarré d'une demie-ordonnée divisée par une quantité constante supposée a.*

LA soutangente est $\frac{ydx}{dy}$. D'où il suit que $\frac{ydx}{dy}$ doit être $= \frac{2yy}{a}$. Par conséquent $aydx = 2y^2dy$, c'est-à-dire, $adx = 2ydy$, & trouvant l'integrale de chaque membre, on aura $ax = yy$; ainsi la courbe cherchée sera la parabole d'*Apollonius*.



nombre plus grand que 1, sera l'integrale de $\frac{dy}{1+y} = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy - y^5dy$, &c. laquelle integrale est $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6$, *&c.* = le logarithme de ce nombre qui est plus grand que 1.

De plus, si la difference de *AB* à *QN* est *y*, ce qui donne $QN = 1 - y$. Ainsi *AQ*, ou ce qui est la même chose, le logarithme du nombre moindre que 1, sera égal à l'integrale de $\frac{-dy}{1-y} = dy - ydy - y^2dy - y^3dy - y^4dy - y^5dy$, &c. dont l'integrale sera $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6$, &c. étant le logarithme d'un nombre moindre que 1.

S C H O L I E.

113. Si le côté *AB*, ou *BC*, de la puissance d'une hyperbole $= 1$, & $BP = y$; alors on aura $AP = 1 + y$, & l'espace asymptotique hyperbolique sera $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{7}y^7$, &c. & si $BQ = y$: on a dans ce cas $AQ = 1 - y$, & la differentielle $\frac{-ydy}{1-y}$, sera celle de l'espace asymptotique hyperbolique. D'où il suit que cet espace sera $= -y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6$, &c. *Fig. 69.*

Par conséquent les logarithmes peuvent être representés par l'hyperbole; car si le côté *AB* de la puissance de l'hyperbole $= 1$, l'abscisse *AP* sera égale à un nombre plus grand que 1, & l'espace asymptotique *BCMP* sera égal au logarithme d'un nombre plus grand que 1; de même l'abscisse *AQ* sera égale à un nombre moindre que 1, & l'espace asymptotique *QNCB* sera égal au logarithme d'un nombre moindre que 1. De plus si $y = 1$, alors on aura $1 + y = 2$; ainsi le logarithme hyperbolique de 2 sera $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$, *&c.* mais ces series convergent lentement, chose à quoi on peut remedier en substituant $\frac{x}{1+x}$ pour *y*.

Remarquez que ces logarithmes hyperboliques sont les mêmes que ceux de *Neper*, & different par conséquent de ceux de *Briggs*, dont nous nous servons communement; cependant on peut les réduire à ceux de *Briggs* étant aux siens comme le logarithme hyperbolique de 10; *par exemple*, 2. 302585092994, *&c.* au logarithme de *Briggs* de 10 qui est 1. 000000000000, *&c.*

SCHOLIE II.

114. Si z eſt un nombre impair dont on cherche le logarithme, les nombres $z-1$, & $z+1$, ſeront égaux; ainſi leurs logarithmes & la difference de leurs logarithmes ſeront donnés, que nous ſupoſerons y. De même le logarithme d'un nombre moyen proportionnel géométrique entre les nombres $z-1$, & $z+1$, ſera la moitié de la ſomme des logarithmes. La ſerie $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ ſera le logarithme du raport du moyen proportionnel géométrique entre les nombres $z-1$, & $z+1$, à un moyen proportionnel arithmetique, *par exemple*, au nombre z.

PROBLEME VI.

115. *Si un corps deſcend librement du point A, par le ſeul effet de la peſanteur, le long de deux plans inclinés AB, AC, aux points B & C. On demande la proportion des tems qu'il faut pour décrire ces eſpaces.*

Fig. 70. Que ADE ſoit une ligne verticale, & BD, CE des lignes horizontales; nommez AD, a; AE, b; DB, x; & EC, z.

Il eſt évident, que le tems qu'un corps employe à parcourir une partie infiniment petite d'une ligne quelconque, comme AB ou AC, peut être pris pour la differentielle ou la fluxion du tems qu'il employeroit à parcourir les lignes entieres AB & AC, ce qui étant accordé, $AB = \sqrt{aa+xx}$, & $AC = \sqrt{bb+zz}$, la differentielle de la premiere ſera $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}}$, & celle de la ſeconde $\frac{zdz}{\sqrt{bb+zz}}$:

De plus la vîteſſe du corps décrivant la partie infiniment petite de AB, exprimée par $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}} = Bb$, & celle de AC, exprimée par $\frac{zdz}{\sqrt{bb+zz}} = Cc$, ſera égale à la vîteſſe reſpective que le corps tombant perpendiculairement du point A, auroit dans les points D & E; les vîteſſes décrivant les petites parties Bb, Cc, étant regardées comme égales, qui ſont

proportionelles aux $\sqrt{AD}$ ($\sqrt{a}$) & à $\sqrt{AE}$ ($\sqrt{b}$); par conſequent les tems employés à décrire Bb, & Cc, ſont comme $\frac{xdx}{\sqrt{a^3+ax}}$ & $\frac{zdz}{\sqrt{b^3+bz}}$. (les tems employés à décrire des eſpaces quelconques, étant en raiſon directe des eſpaces, & en raiſon inverſe des vîteſſes); par conſequent le tems employé à décrire AB, ſera au tems qu'il faut pour parcourir AC comme l'integrale de la premiere differentielle eſt à celle de la ſeconde; ces integrales ſe trouvant aiſément par la cinquiéme forme des Tables de M. *Cottes*, en faiſant $\theta=1$, $n=2$, *&c.* celle de la premiere étant $\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$, & celles de la ſeconde $\sqrt{\frac{bb+zz}{b}}$, de façon que le tems employé à parcourir AB, eſt au tems qu'il faudra pour parcourir AC, comme $\frac{AB}{\sqrt{AD}}$ ($\sqrt{\frac{aa+xx}{a}}$) eſt à $\frac{AC}{\sqrt{CE}}$ ($\sqrt{\frac{bb+zz}{b}}$).

PROBLEME VII.

116. *Trouver la nature de la courbe BC, telle qu'un corps tombant librement par l'effet de ſa peſanteur depuis le point A juſqu'au point B, & continuant de ſe mouvoir le long de cette même courbe, parcourra en deſcendant en tems égaux des eſpaces égaux.*

QUe BD ſoit l'axe, & que AB ſoit $=a$, l'abſciſſe BP $=x$, & l'ordonnée $PM=y$; maintenant la difference de l'ordonnée $dx=0$ dans le point B origine de la courbe, qui étant convexe proche l'axe, il devient tangente au point B; par conſequent Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$) $=dx$ dans le point B; c'eſt pourquoi le temps que le corps employe à décrire l'arc Bb, eſt comme $\frac{dx}{\sqrt{a}}$, puiſque les tems ſont en raiſons directes des eſpaces & en raiſon inverſes des vîteſſes, & les vîteſſes acquiſes en B & en M, étant celles qui s'acquierent par la chûte du point A, aux points B & en M, (qui ſont en raiſons ſoudoublées de AB à AP), le tems employé à parcourir le petit arc Mm, eſt comme $\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{a+x}}$. Mais par la Fig. 73.

condition du probleme, durant la description de la courbe, le corps parcourt en tombant des espaces égaux en tems égaux ; ainsi $\frac{dx}{\sqrt{a}}$ doit être $= \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{a + x}}$, & quarrant chaque membre $\frac{dx^2 + dy^2}{a + x} = \frac{dx^2}{a}$; donc $adx^2 + ady^2 = adx^2 + xdx^2$, c'est-à-dire, $ady^2 = xdx^2$, & tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $\sqrt{a} \times dy = \sqrt{x} \times dx$; enfin prenant les integrales de ces deux membres, on aura $ay^2 = \frac{4}{9} x^3$ ou $\frac{9}{4} ay^2 = x^3$, qui est l'équation de la courbe, & par conséquent une demie-parabole cubique.

Autrement.

Que AP soit $= x$, $PM = y$, la vîtesse acquise par la chute depuis le point A jusqu'au point $M = v$, & $z =$ au tems de cette chute jusqu'en M ; maintenant par les principes de méchaniques $\frac{Mm}{v}$, est comme dz, tems qu'il faut pour décrire le petit arc Mm, c'est-à-dire, que $\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{v}}$, est comme dz. D'où il suit que si a, est une quantité constante, on aura $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = vdz$. Mais v est comme $\sqrt{x}$, ou comme $\sqrt{ax}$; ainsi on peut prendre $v = \sqrt{ax}$. De même z est comme $x - a$, puisque par la condition du probleme, le tems est comme les hauteurs d'où descend le corps : ainsi on peut mettre $x - a = z$, & par la même raison dx pour dz, & en substituant dx pour dz, & $\sqrt{ax}$ pour v, dans l'équation $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = vdz$, on aura cette autre équation $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{ax}$, d'où il suit que $a^2dx^2 + a^2dy^2 = axdx^2$ & $a^2dy^2 = dx\sqrt{x - a}$; ensuite cherchant l'integrale de chaque membre, qu'on peut aisément trouver par les petites Tables des courbes quarrables, *pag.* 29, ou par la troisiéme forme des Tables de M. *Cottes*, on aura $a^2y = \frac{2ax - 2a^2}{3}\sqrt{ax - a^2}$, ou $ay = \frac{2x - 2a}{3}\sqrt{ax - aa}$, faisant maintenant $n = x - a$, on a $\frac{2n}{3}\sqrt{an}$, ou $a^2y^2 = \frac{4an^3}{9}$, ou $\frac{9}{4}ay^2 = n^3$. C'est pourquoi la courbe cherchée est la seconde parabole cubique AB étant $= a$, & $BP = n$.

PROBL. VIII.

PROBLEME VIII.

117. *Trouver la loi de refraction, admettant ce principe, que la nature suit dans ses opérations les voyes les plus simples & les plus courtes.*

COmme la lumiere ne peut se mouvoir en differens milieux avec la même vitesse, soit le raport de la vitesse de la lumiere durant son mouvement de A vers B, où il commence à être rompu, à sa vitesse de B vers C durant sa refraction ; soit, dis-je, ce raport exprimé par $\frac{m}{n}$; alors les tems employés à décrire les lignes AB, BC, seront comme $n \times AB$, est à $n \times BC$, abaissez les perpendiculaires AQ, CP, & faites $AQ = a$, $CP = b$, $PQ = c$, $PB = x$, & vous aurez $BQ = c - x$, & par conséquent $BC = \sqrt{bb + xx}$, & $AB = \sqrt{aa + cc - 2cx + xx}$; d'où il suit que le tems dans lequel $AB + BC$, est parcouruë, sera $= m\sqrt{bb + xx} + n\sqrt{aa + cc - 2cx + xx}$, qui doit être un *minimum*. Ainsi sa differentielle sera $\frac{mxdx}{\sqrt{bb+xx}} + \frac{nxdx}{\sqrt{aa+cc-2cx+xx}} = 0$; donc $\frac{mx}{\sqrt{bb+xx}} = \frac{n \times \overline{c-x}}{\sqrt{aa+cc-2cx+xx}}$, c'est-à-dire, $\frac{m \times PB}{BC} = \frac{n \times BQ}{AB}$. Faites $BC = AB$, alors vous aurez $m \times PB = n \times BQ$, & par conséquent $m : n :: BQ : PB$. Fig. 72.

D'où il suit que si AB ou BC est pris pour le rayon, BQ sera le sinus de l'angle A, & PB, le sinus de l'angle C ; c'est-à-dire, parce que AQ & PC, sont paralleles à DE ; PB est le sinus de l'angle CBE & BQ le sinus de l'angle ABD ; *par exemple*, PB est le sinus de l'angle de refraction, & BQ le sinus de l'angle d'incidence. Il suit de-là que le sinus de l'angle d'incidence, est au sinus de l'angle de refraction dans un raport constant ; *par exemple*, dans celui de la vitesse, de la lumiere avant la refraction, à la vitesse durant cette refraction.

PROBLEME IX.

118. *Trouver l'angle BCD, dans lequel un corps placé en A, frapant obliquement un plan en C, doit se reflechir à un point donné B; de maniere que depuis le point donné A, jusqu'au point donné B, il parcourt le chemin le plus court.*

Fig. 73. DEs points A, B, abaissez les perpendiculaires AE, BD. Que $AE = a$, $BD = b$, $ED = c$, & $EC = x$; alors $CD = c - x$ & $AC = \sqrt{aa + xx}$, ainsi $CB = \sqrt{bb + cc - 2cx + xx}$; c'est pourquoi $AC + CB$, doit être un *minimum*; c'est-à-dire, $\sqrt{aa + xx} + \sqrt{bb + cc - 2cx + xx}$. D'où il suit que sa differentielle $= 0$; donc $\frac{dx}{\sqrt{aa + xx}} + \frac{xdx - cdx}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2cx + x^2}} = 0$; & ainsi $x\sqrt{b^2 + c^2 - 2cx + x^2} + \overline{x - c} \times \sqrt{a^2 + x^2} = 0$; donc $x\sqrt{b^2 + c^2 - 2cx + x^2} = \overline{c - x} \times \sqrt{a^2 + x^2}$, c'est-à-dire, $EC \times CB = CD \times AC$, ainsi $EC : AC :: CD : CB$, par consequent, *par la proposition septiéme, liv. 6. d'Euclide*, les triangles AEC, BDC, sont équiangles; donc l'angle ACE = l'angle BCD.

PROBLEME X.

119. *Si un fluide est composé de parties également mobiles disposées librement & à égales distances les unes des autres, on demande la partie du cone, qui de toutes les autres de même baze Aa, & de même hauteur BC, trouvera la moindre résistance en se mouvant dans ce fluide selon la direction de l'axe, s'avançant par sa petite baze* Dd.

Fig. 74. C'est la même chose de considerer la partie du cone, comme en repos, & les particules du fluide, comme se mouvant contre cette partie du cone avec la même vîtesse.

Tirez DE, parallele à BC, que la hauteur donnée $BC = b$, le rayon de la baze donné $= a$, & $AE = x$. Or il est démontré que l'effet d'une particule quelconque du fluide frapant obliquement la surface AD, de la partie du cone dans la direction DE, pour le mouvoir suivant cette même

direction, eſt à l'effet de la même particule frapant directement contre l'anneau formé par la ligne *AE* (pendant la révolution de *AB*,) pour le mouvoir dans la direction *DE*; comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence *FEV*, ou *ADE*, eſt au quarré du rayon; & parce que dans ce cas l'angle d'incidence eſt invariable, l'effet de toutes les particules frapant la ſuperficie de la partie du cone formée par *AD*, ſera à l'effet de toutes les particules qui peuvent fraper cedit anneau dans cette proportion : c'eſt-à-dire, la réſiſtance de la ſuperficie de la partie du cone formée par *AD*, eſt à la réſiſtance de l'anneau formé par *AE*, comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence eſt au quarré du rayon.

D'où il ſuit que ſi $BC\ (b)$ eſt ſupoſé le rayon, le ſinus de l'angle d'incidence ſera $\frac{bx}{\sqrt{b^2+x^2}}$; car AD, $(\sqrt{b^2+x^2}) : AE\ (x) :: BC(b) : \frac{bx}{\sqrt{b^2+x^2}}$. Si préſentement on ſupoſe que ledit anneau eſt comme ſa réſiſtance, alors le cercle décrit par *BE*, ſera auſſi comme la réſiſtance; mais parce que les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons; donc la reſiſtance de l'anneau eſt à la réſiſtance du cercle, comme $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2\ (2ax - x^2)$ eſt au quarré $\overline{BE}^2\ (a^2 - 2ax + x^2)$ leſquelles quantités repreſenteront les réſiſtances reſpectives de l'anneau & du cercle.

Alors $\overline{BC}^2\ (b^2) : \frac{b^2x^2}{b^2+x^2}$ quarré du ſinus, $:: \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2\ (2ax - x^2) : \frac{2ax^3 - x^4}{b^2+x^2} =$ à la réſiſtance de la ſuperficie de la partie du cone formée par *AD*, auquel ajoûtant la réſiſtance de la petite baze *Dd* $(a^2 - 2ax + xx)$ la réſiſtance de toute la partie du cone ſera $\frac{3ax^3 - x^4}{b^2+x^2} + a^2 - 2ax + xx = \frac{a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2 + a^2x^2}{b^2+x^2}$, dont la difference doit être un *minimum*; c'eſt pourquoi $\frac{2ab^4xdx + 2ab^2x^3dx - 2ab^4dx}{\overline{b^2+x^2}|^2} = 0$; donc $x^2 + \frac{b^2}{a}x = b^2$, ainſi $x = \frac{b}{2a}\sqrt{b^2+x^2} - \frac{b^2}{2a}$; mais à cauſe des triangles ſemblables *AED*, *ABV*, on aura $AE\ (x) = \frac{b}{2a}\sqrt{b^2+x^2} - \frac{b^2}{2a} : BC\ (b) :: AB\ (a) : BV =$

$\frac{a^2}{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}-\frac{1}{2}b} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} - \frac{1}{2}b^2$, puisque $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} - \frac{1}{2}b \times \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2} + \frac{1}{2}b = a^2$, comme il paroît évidemment par la simple inspection : la somme de deux quantités quelconques multipliées par leur difference étant égale à la difference de leurs quarrés.

On tire de-là la construction suivante. Coupez BC (b) en G, & tirez AG dans la ligne BC prolongée ; faites $GV = AG$ $(\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2})$ & V, sera le sommet du cone.

PROBLEME XI.

120. *Trouver la durée d'un pendule, faisant ses vibrations dans une cycloïde.*

Fig. 75. QUe le diametre du cercle generateur, ou la hauteur de toute la cycloïde soit $= a$; que HB, hauteur du point Q, d'où le pendule commence à descendre & à décrire l'arc QB, soit $= b$. De même que $HP = z$; ainsi $PB = 2b - z$: maintenant que le tems que le pendule employe à décrire QB, soit $= x$, & sur HB, décrivez le demi-cercle HNB, tirez PM ; pm, infiniment proche l'un de l'autre & perpendiculaires à HB ; alors $PN = \sqrt{2bz - zz}$, $Pp = Nq = Rm = dz$, & la vîtesse dans les points P, N, $Q = \sqrt{z}$.

Par conséquent puisque la partie Mm, de la courbe est décrite par un mouvement uniforme, le tems de sa description qui est $dx = \frac{Mm}{\sqrt{z}}$. Mais par la proprieté de la cycloïde $Mm : mR :: BS : BP$, & $AB : BS :: BS : BP$, par la nature du cercle ; d'où il suit que $BS : BP :: \sqrt{AB} : \sqrt{BP}$; & de même $Mm : mR :: \sqrt{AB} : \sqrt{PB}$; donc $Mm = \frac{mR \times \sqrt{AB}}{\sqrt{PB}}$, & $dx = \frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2bz - zz}} = \frac{2bdz\sqrt{a}}{2b\sqrt{2bz - zz}}$. Mais $\frac{bdz}{\sqrt{2bz - zz}} = Nn$; par par conséquent $dx = \frac{2\sqrt{a} \times Nn}{2b}$. Maintenant quand l'integrale de dx, sçavoir x, exprime le tems de la descente RD, de tout l'arc de la cycloïde, l'integrale de Nn sera $=$ à la cir-

conference de HNB; donc comme $2b$, diametre du cercle est à la $\frac{1}{2}$ circonference; ainsi $2\sqrt{a}$, est au tems que le pendule employe à décrire l'arc BQ. Par conséquent puisque $2\sqrt{a} = \frac{2a}{\sqrt{a}}$, represente le tems de la descente perpendiculaire par AB, on aura le théoreme suivant; sçavoir, le tems d'une oscillation entiere par un arc quelconque de la cycloïde, est au tems de la descente perpendiculaire par le diametre AB du cercle générateur, comme la circonference du cercle, est au diametre.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que les tems employés à décrire tous les arcs d'une cycloïde sont égaux.

PROBLEME XII.

121. *La ligne loxodromique & la difference de latitude de deux endroits étant données, trouver la difference de longitude.*

QUe P, soit le pole; ARF, le cercle de l'équateur; PCB, PDA des méridiens; ACG, le rhumb passant par les deux lieux donnés A & C, tirez $Pdcb$, infiniment proche de PCB, & de la distance PC décrivez l'arc CD: faites maintenant le rayon $PA=a$, la difference de latitude de deux lieux, sçavoir AD, ou $BC=y$; la difference de longitude qu'on cherche $AB=x$; la tangente de la ligne loxodromique donnée (ou l'angle constant que fait le rhumb avec un méridien quelconque), sçavoir, de l'angle $Ccd=m$. De même faites le sinus de latitude du lieu $C=r$, & le sinus du complement $=z$. Toutes ces grandeurs sont variables, excepté AP (a) & la tangente de la ligne loxodromique donnée $=m$. *Fig. 76.*

Maintenant puisque les arcs Bb, Cd sont semblables, on aura PB (a) : au sinus du complement de latitude de C (z) :: Bb (dx) : $Cd = \frac{zdx}{a}$. De plus par la nature du cercle $\overline{PB}^2$ moins le quarré du sinus de latitude de C, sçavoir $a^2 - r^2 = z^2$, & de $(dy) = \sqrt{dr^2 + dz^2}$, comme il est évident. Ainsi en

prenant la differentielle de l'équation $a^2 - r^2 = z^2$, on aura $dz^2 = \frac{r^2dr^2}{a^2-r^2}$; ainsi mettant $\frac{r^2dr^2}{a^2-r^2}$ pour dz^2, dans l'équation $dy = \sqrt{dr^2 + dz^2}$, elle se changera en celle-cy, $dy = \frac{adr}{z}$, & si cd (dy) est suposé rayon, alors Cd est la tangente de l'angle Ccd de la ligne loxodromique $= m$. Donc PB (a) : $m :: cd$ (dy) : $cd = \frac{zdx}{a}$, & multipliant les extremes & les moyens on aura $mdy = zdx$; ainsi $dx = \frac{mdy}{z}$; d'où il suit que substituant $\frac{adr}{z}$ pour dy, il viendra $dx = \frac{madr}{z^2} = \frac{madr}{a^2-r^2}$; & prenant les integrales on aura BA $(x) = m \times \frac{r}{a} + \frac{r^3}{3a^3} + \frac{r^5}{5a^5} + \frac{r^7}{7a^7}$ &c. $=$ à la difference des longitudes des lieux A & C.

L'integrale de $\frac{amdr}{a^2-r^2}$ peut être exprimée selon la méthode de M. *Cottes* dans la mesure d'un raport. Car cette differentielle peut se raporter à la seconde forme de ses Tables : car faisant $\theta = 0$, $n = 2$, $D = am$, $e = a^2$, $f = -1$, R ($\sqrt{\frac{-e}{f}}$) $= a$, T ($x^{\frac{1}{2}n}$) $= r$, & S ($= \sqrt{\frac{e+fz^n}{f}}$) $= \sqrt{aa-rr}$, la differentielle de cette forme $\frac{Dz^{\theta n+\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n}\,dz$, se changera en $\frac{amdr}{a^2-r^2}$, & l'integrale $\frac{2}{ne}DR \left| \frac{R+T}{S} \right.$ sera $m \left| \frac{a+r}{\sqrt{a^2-r^2}} \right. = m \left| \frac{a+r}{z} \right.$, qui est l'expression differencielle de la longitude BA.

C'est-à-dire, que la difference de longitude est égale à la mesure du raport du rayon ajoûté au sinus de latitude du lieu C, & au sinus du complement du même lieu, la tangente de la ligne loxodromique en étant le module ; & si E est un autre lieu dans le rhumb dont le sinus de latitude soit donné ; alors on peut trouver par la même regle la difference de longitude AH, & par conséquent aussi la difference de longitude BH des lieux C & E.



COROLLAIRE.

Si le rhumb $AC = u$, & cd (dy) égale le rayon, alors Cc sera la secante de la ligne loxodromique; d'où on tire PB (a) : Cc :: cd (dy) : Cc (du); donc $adu = Cc \times dy$, & prenant les integrales $au = Cc \times y$; donc $u = \frac{Cc \times y}{a}$; c'est-à-dire, la difference de latitude AD est à la longueur AC (y) comme le rayon est à la secante de la ligne loxodromique.

PROBLEME XIII.

122. *Cuber le solide formé par la révolution des espaces conchoïdales CPGB, & EGQC, autour de la ligne ABC, tirée du pole A perpendiculaire à l'asymptote EG.*

Faites Ap infiniment près de AP, du point A décrivez des petits arcs Qs, Gr, Pn, à la distance BC, ou Bc; du point A, decrivez l'arc EF, & des points F, Q, P, tirez FH, QK, PI, perpendiculaires à AE. Nommez CB ($= AE = AF = PC = QG = GB$) $= a$, AB, b, EH, x, AH, z, & HF, y; maintenant à cause de la similitude des triangles ABG, AHF; AH (z) : AF (a) :: AB (b) : $AG = \frac{ab}{z}$; d'où on tire $AQ = \frac{ab}{z} - a$. & par la même raison $AP = \frac{ab}{z} + a$. Fig. 77.

De plus, AF (a) : FH (y) :: AQ ($\frac{ab}{z} - a$) : $QK = \frac{by}{z} - y$; ainsi $PI = \frac{by}{z} + y$; alors la difference de l'arc EF, sçavoir Ff, sera $\frac{adz}{y}$; ainsi les secteurs AFf, AQs, sont semblables; donc AF (a) : Ff ($\frac{adz}{y}$) :: AQ ($\frac{ab}{z} - a$) : $Qs = \frac{abdz}{zy} - adz$ de la même maniere $Pn = \frac{abdz}{zy} + adz$.

De plus la difference du solide formé par la révolution ci-dessus mentionnée de l'espace AcQ sera $= \frac{1}{3} AQ \times Qs$, multiplié par la circonference décrite par le point Q, de même la difference du solide formé par l'espace $ACP = \frac{1}{3} AP \times Pn$, multiplié par la circonference décrite par le point P, & la difference du cone formé par le triangle rectangle ABG, pendant la révolution ci-dessus mentionnée, sera $\frac{1}{3} AG \times Gr$,

multiplié par la circonferente décrite par le point G; par consequent la differentielle du solide produite par AcQ sera $\overline{\frac{ab}{3z} - \frac{a}{3}} \times \frac{p}{r} \times \overline{\frac{by}{z} - y} \times \frac{abdz}{zy} - adz$ ($\frac{p}{r}$, étant le raport du rayon à la circonference) $= \frac{p}{r} \times \overline{\frac{a^2b^3dz}{3z^3} - \frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{a^2bdz}{z} - \frac{a^2dz}{3}}$; & la differentielle du solide produit par ACP, sera $\overline{\frac{ab}{3z} + \frac{a}{3}} \times \frac{p}{r} \times \overline{\frac{by}{z} + y} \times \overline{\frac{by}{z} + y} = \frac{p}{r} \times \frac{a^2b^3dz}{3z^3} + \frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{a^2bdz}{z} + \frac{a^2dz}{3}$, & l'élement de ces deux differentielles sera $= \frac{p}{r} \times \frac{2a^2b^2dz}{z^2} + \frac{2}{3}a^2dz =$ à la difference de la somme des deux solides produits par les espaces $cQGB$, $BGPC$; & ainsi $\frac{p}{r} \times \overline{\frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{1}{3}a^2dz}$ est la differentielle, de la $\frac{1}{2}$ de la somme, dont l'integrale sera $\frac{p}{r} \times \overline{\frac{a^2b^2}{z} - \frac{1}{3}a^2z} =$ (substituant $a - x$ pour z) $\frac{p}{r} \times \overline{\frac{a^2b^2}{a-x} - \frac{a^3 - a^2x}{3}} = \frac{p}{r} \times \frac{\overline{a^2b^2 - \frac{a^4}{3} + \frac{2a^3x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}}{\overline{a-x}}$, & faisant $x = 0$, l'integrale sera $\frac{p}{r} \times \overline{ab^2 - a^3}$, qu'il faut soustraire; en sorte que la véritable integrale est $\frac{p}{r} \times \frac{\overline{a^2b^2 - \frac{a^4}{3} + \frac{2a^3x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}}{\overline{a-x}} - ab^2 + a^3 =$

$$\frac{p}{r} \times \frac{\overline{ab^2x + \frac{a^3x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}}{\overline{a-x}}.$$

On trouvera à peu près de la même maniere la differentielle de la moitié de la difference des solides, comme nous avons trouvé la differentielle de la moitié de leur somme. Car on aura par les triangles semblables AHF, ABG; ces proportions AH (z) : AF (a) :: AB (b) : $AG = \frac{ab}{z}$, & AH (z) : HF (y) :: AB (b) : $BG = \frac{by}{z}$, & puisque les secteurs AFf, APr,

APr, sont aussi semblables, on aura $AF\ (a) : Ff\ (\frac{adz}{y}) :: AG\ (\frac{ab}{z}) : Gr = \frac{abdz}{yz}$, & par conséquent la differentielle du cone décrit par le triangle rectangle *ABG* sera $= \frac{p}{r} \times \frac{ab}{3z} \times \frac{by}{z} \times \frac{abdz}{yz}, = \frac{p}{r} \times \frac{a^2b^3dz}{3z^3}$, de laquelle ôtant la differentielle ci-dessus trouvée, du solide décrit par l'espace *AcQ*, le restant $\frac{p}{r} \times \overline{\frac{a^2b^2dz}{z^2} - \frac{a^2bdz}{z} + \frac{a^2dz}{3}}$, est la differentielle du solide formé par l'espace *CQGB*, & si on ôte $\frac{p}{r} \times \frac{a^2b^3dz}{3z^3}$, de la differentielle du solide formé par l'espace *ACP*, le restant $\frac{p}{r} \times \overline{\frac{a^2b^2dz}{z^2} + \frac{a^2bdz}{z} + \frac{a^2dz}{3}}$, est la differentielle de l'autre solide *BGPC*, de laquelle ôtant la differentielle du solide *CQGB*, le restant $\frac{p}{r} \times \frac{2a^2bdz}{z}$, est la difference des deux solides ci-dessus mentionnés, de sorte que $\frac{p}{r} \times \frac{a^2bdz}{z}$, est la differentielle de la moitié de la difference des solides, qui peut être comparée à la premiere forme des Tables de M. *Cottes*, en substituant premierement $a-x$, au lieu de z, & $-dx$ pour dz; ce qui changera la differentielle en $\frac{p}{r} \times \frac{2a^2bdx}{a-x}$, & faisant $z = x$, $\theta = 1$, $\eta = 1$, $D = a^2b$, $e = a$, $f = -1$, la differentielle $\frac{Dz^{\theta\eta-1}}{e+fz^\eta}dz = \frac{p}{r} \times \frac{a^2bdx}{a-x}$, & l'integrale $\frac{D}{\eta f} \mid \frac{e+fz^\eta}{e}$ deviendra $= - \frac{p}{r}\, aab \mid \frac{a-x}{a} = \frac{p}{r}\, aab \mid \frac{a}{a-x}$; puisque le logarithme du raport de a, à $aa-x$, avec le signe *plus* est égal au logarithme du raport de $a-x$, à a avec le signe *moins*.

Les integrales ou quantités de la moitié de la somme & de la moitié de la difference des solides étant trouvées, nous passerons maintenant à leur construction, en commençant par celle de la moitié de la somme. Il est aisé, suivant ce qu'on vient de dire, de trouver la differentielle d'un secteur de sphere décrit par le secteur circulaire *AEF*, & par conséquent de trouver aussi l'integrale ou quantité de ce secteur;

la differentielle étant $= \frac{p}{r} \times \frac{a}{3} \times y \times \frac{adz}{y} = \frac{p}{r} \times \frac{a^2dz}{3}$, & en substituant $a-x$, au lieu de z, l'integrale sera $= \frac{p}{r} \times \frac{a^2z}{3} = \frac{p}{r} \times \frac{a^3-a^2x}{3}$, & suposant $x=0$, cette même integrale deviendra $\frac{p}{r} \times \frac{a^3}{3}$ qu'il faudra soustraire de l'autre ; d'où il suit que la véritable integrale sera $\frac{p}{r} \times \frac{-a^2x}{3}$ ou $\frac{p}{r} \times \frac{a^2x}{3} =$ à la solidité du secteur de la sphere decrite, comme on a dit ci-dessus ; tout ceci étant suposé : Faites $\overline{AE}^2\ (aa)$: $3AB \times AG + \overline{AE}^2\ (3b \times \frac{ab}{a-x} + aa)$: : le secteur de la sphere ($\frac{p}{r} \times \frac{a^2x}{3}$) est à la solidité de la moitié de la somme des solides $= \frac{p}{r} \times \overline{ab^2x + \frac{a^2x}{3} - \frac{a^2x^2}{3}}$, qui est la même expression qu'on a trouvée ci-devant.

Enfin pour construire l'expression $\frac{p}{r}\ aab \left| \frac{a}{a-x} \right.$, nous sçavons que $\frac{p}{2r}\ aa$, est l'aire d'un cercle qui a pour rayon $BC\ (a)$ qui multiplié par $b \left| \frac{a}{a-x} \right.$ est la solidité de la moitié de la difference. Mais à cause des triangles semblables AHF, AGB, le raport de $a=AF$ à $a-x=AH$, est égal au raport de AG à AB ; par conséquent la valeur de la moitié de la difference des solides qu'on doit cuber, est égale à un cylindre qui a $cC\ (2a)$ pour diametre de sa baze, & qui a pour la hauteur la mesure du raport doublé de AG à AB, le module étant $AB\ (b)$. Car $\frac{p}{2r}\ aab \left| \frac{a^2}{\overline{a-x}^2} \right. = \frac{p}{r}\ aab \left| \frac{a}{a-x} \right.$; puisque le logarithme d'une raison double est la même que celui d'une raison doublée.



PROBLEME XIV.

123. *Trouver la nature d'une courbe AMC, telle que si on conçoit un vase formé par sa révolution autour de l'axe AB perpendiculaire à l'horizon, & que ce vase soit rempli d'eau qu'on supposera couler par un petit trou rond percé dans le fond de ce même vase; la trouver, dis-je, telle que la surface de l'eau en descendant laisse des espaces égaux en tems égaux; suposant que la vitesse de l'eau qui sort par le trou, soit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au-dessus du trou.*

Soit $AB = a$, & $AP = x$, hauteur d'eau indeterminée, & soit $PM = y$, soit encore la surface du trou $= b$, la vitesse $= v$, & le tems de l'affaissement de la surface $= t$, qui par la condition du probleme est comme $a - x$; or $\frac{dx}{dt}$, est comme v; c'est-à-dire, comme $\sqrt{x}$, ou comme $\sqrt{ax}$, par la condition aussi du probleme; donc $\frac{dx}{dt} : \sqrt{ax}$, comme la surface du trou b, est à la surface de l'eau y^2. Or, puisque t peut être pris pour $a - x$; par conséquent $dt = dx$; ainsi $1 : \sqrt{ax} :: b^2 : y^2$. D'où on tire $b^2 \sqrt{ax} = y^2$ & $ab^4 x = y^4$, & par conséquent la courbe ACM est une parabole quarrée quarrée. Fig. 78.

PROBLEME XV.

124. *Si AC est une ligne horizontale, sur le point C de laquelle ligne est élevé un parallelepipe CD, dont une des surfaces soit perpendiculaire à la ligne AC; il s'agit de trouver l'angle CAB sur le point A; duquel angle suposant posée l'extrêmité A, d'un long solide AB; de maniere qu'avec son autre extrêmité B, il vienne presser le parallelepipede CD, ce solide comprimera perpendiculairement CD avec plus de force au point A, qu'en tout autre point.*

Soit F le centre de gravité du corps AB; du point F, tirez la ligne FE perpendiculaire à AC, & du point E, tirez EI perpendiculaire à AB; tirez aussi du point B, la ligne BH, Fig. 79.

perpendiculaire à $AE = AE$, & du point H tirez HG perpendiculaire à BD, soit $AB = a$, soit $AF = b$, & $CE = x$.

Maintenant la pression que fera le solide AB, dans le point B, & dans la direction HB, contre CD, sera comme AE; ainsi on peut le representer par AE; donc puisque $BH = AE$, la pression directe contre CD dans le point B, sera $= HG$. Cela est démontré dans les principes de la méchanique. D'où il suit que $CB \times HG$, est l'effet de la pression perpendiculaire du solide AB contre CD dans le point B qui doit être un *maximum*. De plus $AB\ (a) : AC\ (\sqrt{a^2 - x^2}) :: AF\ (b) : AE = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, & puisque les triangles AEI, ACB sont semblables, on aura $AB\ (a) : BC\ (x) :: AE\ (\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}) : EI = HG = \frac{bx}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$; d'où il suit que $CB \times HG = \frac{bx^2}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$, dont la differentielle $\frac{4a^2b^2x^3dx - 6b^2x^5dx}{2a^4 \times \frac{bx^2}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}}$, doit être $= 0$; donc $2a^2 = 3x^2$, ainsi $x = \sqrt{\frac{2aa}{3}}$; par consequent comme $AB : \sqrt{\frac{2}{3}\overline{AB}^2}$, de même le rayon est au sinus de l'angle $CAB = 54^d. 44'$.

PROBLEME XVI.

125. *Trouver la nature d'une courbe ACDB, au long de laquelle si un corps tombe librement par son propre poids du point donné A, au point donné B, le tems de sa descente soit moindre que celui qu'employeroit dans sa descente du point A au point B, un corps qui passeroit le long de toute autre courbe.*

Fig. 80. Soit C & D deux points donnés dans la courbe, infiniment proche l'un de l'autre : soit le point intermediaire E de la courbe, tel que tirant DI & EH perpendiculaires, & AK, CL, EM, paralleles à l'horizon ; la petite ligne EL, soit $= DM$.

Maintenant puisqu'on supose que la ligne $ACEDB$, est la courbe le long de laquelle le corps tombe du point A au

point *B*, dans le moindre tems qu'il est possible; il est clair qu'il tombera du point *C* au point *D*, partie quelconque de cette même courbe dans le moindre tems possible. Car si cela n'étoit pas, supofons qu'il tombe plus vîte le long de *CGD*, qu'au long de *CED*, alors la courbe *ACGDB*, seroit décrite en moindre tems que la courbe *ACEDB*, ce qui est absurde.

Puisque les points *C* & *D*, sont donnés de position, les lignes *HE*, *ID*, $EL = DM$, sont par conséquent invariables & données, & *CL*, *CE*, *EM*, *ED*, sont variables: soit $EL = DM = m$, $HE = b$, $ID = p$, soit $CL = u$, $EM = z$; alors le tems qui sera employé à la description de la ligne *CE* (étant en raison directe de *CE*, & en raison inverse de la vîtesse) est comme $\frac{CE}{\sqrt{HE}}$ ($\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{b}}$) regardant comme égales les vîtesses avec lesquelles sont décrites chacunes de ces lignes infiniment petites; de même le tems que le corps employe à décrire la petite ligne *ED*, est comme $\frac{ED}{\sqrt{ID}}$ ($\sqrt{\frac{m^2 + z^2}{p}}$), par conséquent la somme de ces tems doit être un *minimum*; sçavoir $\sqrt{\frac{m^2 + v^2}{b}} + \sqrt{\frac{m^2 + z^2}{p}}$; en sorte que la differentielle $\frac{vdv}{b^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^2 + v^2}} + \frac{zdz}{p^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^2 + z^2}}$, doit être $= 0$. Or $CN = v + z$ est invariable, & $dv + dz = 0$, & $dv = -dz$; donc $\frac{v}{b^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^2 + v^2}} = \frac{z}{p^{\frac{1}{2}}\sqrt{m^2 + z^2}}$.

Maintenant si $AH = x$, $HE = y$, alors $EM = dx$, & $MD = dy$, de même $ED = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; par consequent la difference de la courbe est toujours comme $\frac{dx}{y^{\frac{1}{2}}}$; c'est-à-dire, en raison directe de la difference de l'abscisse *AH* (*x*), & en raison réciproque & soudoublée de l'ordonnée *HE* (*y*).

On trouvera que la courbe qui a cette proprieté est la cycloïde passant par les points donnés *A* & *B*, ayant son sommet renversé, comme on le démontrera facilement: qu'on supose *A* & *B*, posés de façon que *ACD* soit une demie-cycloyde, &c.

Decrivez le demi-cercle generateur *KPB*; prolongez la

ligne *EM*, jufqu'à *P* & *Q*; tirez la tangente *CET* au point *E* de la courbe, & du point *B*, tirez la corde *PB*; foit $BK = a$, alors $KQ = y$, & $BQ = a - y$, c'eft une proprieté connuë de la cycloïde d'avoir fa tangente *ET*, parallele à la corde *PB* de l'arc correfpondant du cercle generateur; ainfi les triangles *BPQ*, *ECL*, font femblables, & *PQ* $(\sqrt{ay - y^2}) : BP\ (\sqrt{a^2 - y^2}) :: CL\ (dx) : CE = \frac{dx\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{ay - y^2}}$ $= \frac{dx \times \sqrt{a} \times \sqrt{a - y}}{\sqrt{y} \times \sqrt{a - y}} = \frac{dx \times \sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, laquelle expreffion eft comme $\frac{dx}{y^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt{a}$ étant conftante ou donnée; donc la cycloïde *AC* & *DB* eft la courbe par laquelle un corps defcend le plus vîte.

PROBLEME XVII.

Fig. 82. 126. *Trouver la nature de la courbe DM, qui foit telle que le folide décrit par fa révolution autour de fon axe AP, mouvant dans un fluide (tel que nous avons dit, art. 119.) dans la direction de fon axe, trouvera moins de réfiftance, que toute autre fuperficie décrite par toute autre courbe qui fe termine dans les points donnés D & M, & qui fe meut de la même maniere autour du même axe AP.*

Fig. 81. Supofez les lignes droites *MN*, *NO*, des parties infiniment petites de la courbe cherchée; or les furfaces décrites par ces lignes trouveront moins de réfiftance que deux autres fuperficies quelconques décrites par deux parties quelconques tirées des points *O* & *M*, à tout autre point qu'au point *N*. Cela eft clair: car fupofant que cela ne fût point, il s'enfuivroit que le point *N* feroit hors de la courbe cherchée.

Cela pofé, des points *M*, *N*, *O*, tirez *MP*, *NQ*, *OH*, perpendiculaires à l'axe, & du point *M*, tirez *MF*, parallele au même axe; tirez auffi par le point *N* un autre parallele indefini *GNT* qui coupe la ligne *OH* dans le point *G*, maintenant la réfiftance de la petite fuperficie par la ligne *MN*, eft à la réfiftance du petit *anneau* décrit par *FN*, comme le quarré du finus de l'angle d'incidence eft au quarré du rayon; c'eft-à-dire, (à caufe que l'angle *FMN* eft égal

à l'angle d'incidence TNM) faisant MN le rayon comme $\overline{FN}^2$ à $\overline{MN}^2$, & si la résistance de l'*anneau* décrit par FN, est représenté par lui-même ou plûtôt par $\overline{QF}^2 + 2QF \times FN + \overline{FN}^2$ moins $\overline{QF}^2$ (qui est la difference de $\overline{QN}^2$, & $\overline{QF}^2$) $= 2QF \times FN + \overline{FN}^2$, cette difference étant toujours comme celle de l'*anneau*. Mais à cause que FN est infiniment moindre que QF; $\overline{FN}^2$, est infiniment moindre que $2QF \times FN$; & ainsi on peut le rejetter; & la résistance de l'*anneau* sera $2QF \times FN$, ou $QF \times FN$, ou $PM \times FN$; d'où en faisant $\overline{MN}^2 : \overline{NF}^2 :: PM \times FN : \frac{\overline{NF}^3 \times PM}{\overline{MN}^2}$, ce qui exprimera la résistance de la superficie décrite par MN; de même $\frac{\overline{GO}^3 \times QN}{\overline{ON}^2}$ sera celle de la superficie décrite par ON.

De plus soit donnée de position les points O, M, & la ligne droite GT; alors il faut chercher la position de MN, NO, qui soit telle, que la résistance de la superficie décrite par ces lignes, soit moindre que la résistance des autres superficies décrites par d'autres lignes quelconques On, nM. Pour la trouver soit $PN = a$, $FN = b$, $GO = c$, $NQ = e$; ces lignes sont toutes données & invariables, & qu'on supose les quantités variables $MN = x$, & $NO = z$.

Alors la résistance de la superficie décrite par MN, sera $= \frac{ab^3}{x^2}$ comme il est démontré ci-dessus; de même $\frac{ec^3}{z^2}$ sera la résistance de la superficie décrite par ON; d'où il suit que $\frac{ab^3}{x^2} + \frac{ec^3}{z^2}$, doit être un *minimum*; c'est-à-dire, $\frac{ab^3xdx}{x^4} + \frac{ec^3zdz}{z^4}$, ou $\frac{ab^3dx}{x^3} + \frac{ec^3dz}{z^3} = 0$, d'où il suit $-\frac{ab^3dx}{x^3} = \frac{ec^3dz}{z^3}$.

Maintenant pour trouver une valeur affirmative de $-dx$, affectée de dz, prenez le point n infiniment près de N, & tirez les lignes droites On, Mn, ausquelles tirez les perpendiculaires NS, NR; or puisque Nn, & par conséquent NS est infiniment moindre que NM, donc $MN = MR$; ainsi l'angle MNR = l'angle MRN est égal à un angle droit. D'où il suit que l'angle RNn = l'angle FNM; car chacun d'eux

étant ajoûté à l'angle MNn, forme un angle droit. De même, puisque les triangles NSn, nGO, sont équiangles, ayant chacun un angle droit OGn, NSn & l'angle ONG, commun; donc l'angle $SNn =$ l'angle $SOG = NOG$, l'angle NOS, étant infinimenr petit. Ainsi faisant Nn, le rayon on aura $Rn\,(-dx) : Sn\,(dz)$ :: le sinus de l'angle FNM : au sinus de l'angle GON, suposant MN, le rayon (c'est-à-dire, faisant $MF = m$, & $NG = n$, & prenant $NL = MN$, tirant LK, parallele à OG) comme $MF\,(m) : NG\,(n)$. Donc $-dx = \frac{mzdz}{nx}$, cette valeur étant mise dans l'équation ci-dessus, on aura $\frac{ab^{3}mzdz}{nx^{4}} = \frac{ec^{3}dz}{z^{3}}$, d'où on tire $\frac{ab^{3}m}{x^{4}} = \frac{ec^{3}n}{z^{4}}$.

Maintenant tirez $AB\,(a)$ perpendiculaire à l'axe AP, & les lignes droites BC, BE, paralleles aux deux soutendantes infiniment petites MN, NO; alors $4\overline{AB}^{2} \times AC$ ($4a^{2} \times \frac{am}{b}$) : $\overline{BC}^{3}$ ($\frac{a^{3}x^{3}}{b^{3}}$) :: BC ($\frac{ax}{b}$) : MP (a), & multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $\frac{b^{3}m}{x^{4}} = \frac{1}{4}$ ou $\frac{ab^{3}m}{x^{4}} = \frac{a}{4}$; de même $4\overline{AB}^{2} \times AE : \overline{BE}^{3} :: BE : NQ = \frac{ec^{3}n}{z^{4}}$.

Par conséquent la nature de la courbe DM est telle que prenant AB dans la ligne AK perpendiculaire à l'axe $= a$, & tirant BC parallele aux tangentes de la courbe dans un point quelconque M, nous aurons toujours $4\overline{AB}^{2} \times AC : \overline{BC}^{3} :: BC : MP$, qui est l'ordonnée.

Maintenant cette courbure peut être décrite par une courbe logarithmique de cette maniere. Prenez $AB = a$, dans la ligne AK; & dans la ligne AP prolongée vers le point A, prenez $AE = \sqrt{\frac{1}{3}aa}$, & par le point E, décrivez la courbe logarithmique FEN à l'asymptote AK, dont la soutangente $= \frac{1}{4}a$; alors prenant AC (qu'on supose $= S$) à volonté, & tirant CN parallele à AK, faites $AK = \frac{aa}{4s} + \frac{1}{2}s + \frac{s^{3}}{4aa}$, & $AP = \frac{ss}{4a} + \frac{3s^{4}}{16a^{3}} - \frac{5}{48}a \mp CN$, sçavoir *moins* lorsque AC est plus grand que AE, & *plus*, lorsqu'il est moindre : tirez les lignes droites KM, PM, paralleles à AP, AK; alors leur point d'intersection M, est dans la courbe DM cherchée.

Car

Car faisant $AP = x$, $PM = y$, $AC = S$, la proprieté de la courbe donnera AK ou PM $(y) = \frac{a^4 + 2a^2ss + s^4}{4a^2s}$, & par conséquent $dy = \frac{1}{2}ds + \frac{3ssds}{4a^2} - \frac{a^2ds}{4s^2}$. Or puisque BC est parallele aux tangentes au point M, par consequent $dx = \frac{sdy}{a} = \frac{sds}{2a} + \frac{3s^3ds}{4a^3} - \frac{ads}{4s}$: l'integrale duquel est AP $(x) = \frac{ss}{4a} + \frac{3s^4}{16a^3}$, *moins* l'integrale de $\frac{ads}{4s}$, *plus* ou *moins* quelques quantités invariables. Suposant que cette quantité soit $\frac{7}{16}a$, que nous avons soustrait, de sorte que CN, qui par la nature de la courbe logarithmique FEN, est l'integrale de $\pm \frac{ads}{4s}$ venant $= 0$, AP (x) soit aussi $= 0$, d'où *&c.*

Lorsque $AC = AE$, l'ordonnée PM, qui est alors un *minimum* devient $AD = \frac{4}{3}AE$, & la tangente en D, sera parallele à BE; mais si AC est suposé moindre que AE, la partie DO de la courbe sera convexe vers DM, & divergeant de plus en plus vers AB, AK. Par consequent le solide qui trouvera la moindre résistance, peut être ou convexe ou concave, ou en partie convexe, & en partie concave, & le point D est un point de *rebroussement.*

Remarquez que la courbe logarithmique peut être facilement décrite de cette maniere ; il suffit de prendre $CN =$ à la mesure du raport AE à AC, le module étant $\frac{1}{4}AB$ (a).

PROBLEME XVIII.

127. *Trouver l'angle ABC que forme le plan d'une aile de moulin à vent qui a la figure d'un parallelogramme rectangle, & dont la largeur donnée est CB avec l'axe AB, tel qu'un vent sonflant dans la direction de son axe le fasse tourner avec plus de force que s'il étoit dans toute autre inclination par raport à cet axe.*

Tirez CD, perpendiculaire à l'axe, soit $CB = a$, $DB = x$. Fig. 84.

Si BC represente le nombre des particules d'air qui frape contre l'aîle lorsqu'il est perpendiculaire à l'axe AB; alors DC, sera le nombre des particules qui frapent contre l'aîle orsqu'il est incliné vers l'axe dans l'angle DBC.

Maintenant il suit des principes de la méchanique, que la force de l'aîle dans la direction DC, sera comme $BD \times DC \times DC = BD \times \overline{DC}^2$, c'est-à-dire, le vent donné fera tourner l'aîle avec une force qui sera toujours comme $BD \times \overline{DC}^2$, qui doit par conséquent être un *maximum*; mais $BD \times \overline{DC}^2 = x \times \overline{aa - xx} = a^2x - x^3$; d'où on tire $a^2dx - 3x^2dx = 0$, & $a^2 = 3x^2$; ainsi $\frac{1}{3}a^2 = x^2$, & $\sqrt{\frac{1}{3}a^2} = x$, & par conséquent comme $CB : \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, ainsi le rayon est au sinus de l'angle C, dont le complément est l'angle ABC cherché; par conséquent l'angle C est de $35^\circ. 16'$, & l'angle ABC, $54^\circ. 44'$.

Scholie.

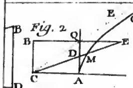
Ce probleme pour sa facilité auroit dû être mis devant plusieurs autres, surtout avant les deux derniers; mais tous les autres étoient imprimés avant que j'eusse pensé à celui-ci, ainsi plûtôt que de le suprimer, je le mets ici.

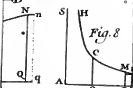
M. *Mariotte* dans ses Hydrotastiques a tâché de le résoudre, mais sa conclusion est fausse. M. *Parent* l'a fait comme on le trouve dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*; mais nous ne connoissons pas son procedé qui ne se trouve ni dans l'Histoire, ni dans les Mémoires.

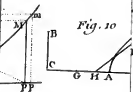
FIN.

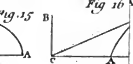
De l'Imprimerie de Claude Simon.

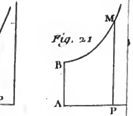


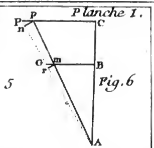

Fig. 2
B
Q
E
D
M
C
A
D
. 5

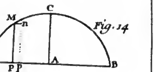

Fig. 8
S
H
C
M
A
C
P
N
n
Q
q

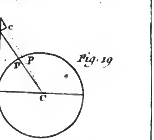

Fig. 10
B
C
G
H
A
M
m
P P

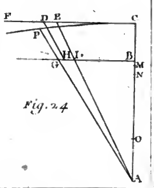

Fig. 15
Fig 16
B
C
A


Fig. 21
M
B
A
P


Planche I.
Fig. 6
P
p
n
C
O
m
r
B
A


Fig. 14
M
n
C
P p
A
B


Fig. 19
t
T
c
p
P
C


Fig. 24
F
D
E
C
p
H
I
B
G
M
N
O
A

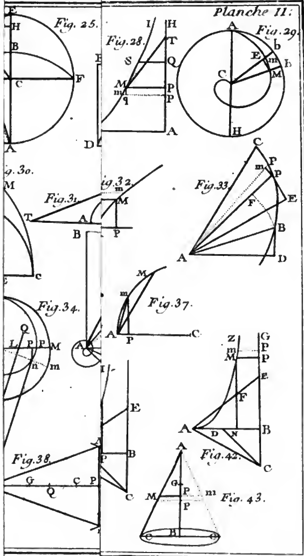
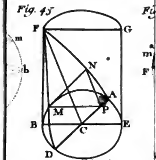
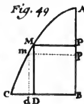
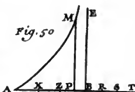
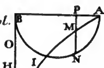

Planche II.
Fig. 25.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 42.
Fig. 43.

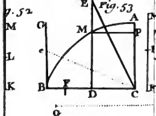
Planche III.

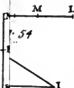

Fig. 45
F
G
N
A
M
P
B
C
E
D

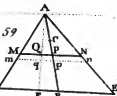

Fig. 49
A
M
P
m
C
d D
B

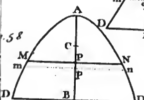

Fig. 50
M
E
A
X
Z P
B R
T


Fig. 50 Schol.
B
P
A
M
O
H
I
N

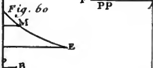

Fig. 53
E
A
G
M
P
e
B
F
D
C

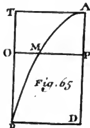

M
L
I


Fig. 59
A
M
Q
P
N
m
q
n
D
E
F
B


A
C
M
P
N
m
n
D
B
D


G


M
m
B
F
PP


T
A
O
M
P
Fig. 65
B
D

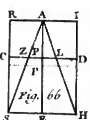
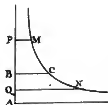
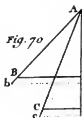
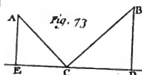
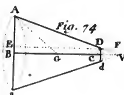

R
A
I
C
Z P
L
D
Fig. 66
S
E
H

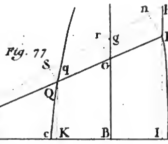
Planche IV.

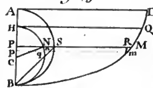

P
M
B
C
Q
N
A
Fig. 69

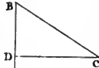

Fig. 70
A
B
b
D
C
E

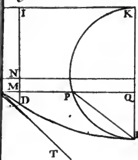

A
Fig. 73
B
E
C
D

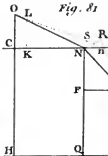

A
Fig. 74
E
B
G
C
D
F
V
d
a

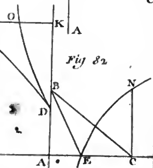

Fig. 77
n
P
r
g
S
q
G
Q
f
F
A
H
E
c
K
B
I


Fig. 75
A
D
H
Q
P
N
S
R
M
C
B


B
Fig 84
D
C
A


Fig. 80
I
K
N
M
D
P
Q
B
T


O
L
Fig. 81
S
R
C
K
N
n
F
H
Q


O
K
Fig 82
N
B
D
A
E
C

FAUTES A CORRIGER.

PAge 1, *ligne* 11, integrales exprimées : *lisez* integrales des differentielles exprimées.

P. 5, *l.* 11, les chiffres & en ôtant : *lisez* des zeros & en formant.

P. 11, *l.* 20, puissance z : *lisez* puissance de z. *Ibid. ligne pénult.* Ces produits après : *lisez* Ces produits (qui ont *b*,) après.

P. 12, *l.* 24, à la seconde puissance, *lisez* à toutes les puissances. *ligne* 25, si vous mettez : *lisez* si vous avez.

P. 18, *l.* 2, les integrales : *lisez* l'integrale.

P. 29, *l.* 5, $\times \sqrt{e-+fz}$, *lisez* $\times \sqrt{e-+fz^{r}}$.

P. 30, *l.* 12 *& suiv.* de Briggs ; de même que pour trouver la mesure des raisons & des rapports, on se sert d'une grande Table : *lisez* de Briggs qui servent à trouver la mesure des rapports ou à l'aide de grande Table.

P. 37, *l.* 6, continuë : *lisez* continuée.

P. 40, *l.* 15, pour l'aire : *lisez* comme l'aire.

P. 66, *l.* 28, égale à l'élement : *lisez* est égale à l'élement.

P. 69, *l.* 1, *BMSQ* : lisez *PMSQ*.

P. 76 en marge, *Fig.* 31 : lisez *Fig.* 7.

P. 81, *l.* 14, *AP* : lisez *aP*.

P. 105 en marge, *Fig.* 45 : lisez *Fig.* 44.

P. 116, *l.* 13, *APF* : lisez *APT*.

P. 117, *l.* 17, & faisant : *lisez* en faisant.

P. 119, *l.* 14, au quotient de la division de la somme : *lisez* au quotient de la somme.

P. 137, *l.* 1, sera la distance : *lisez* qui sera la distance. *ligne* 23, *AD* lisez *Aa*.

P. 140, *l.* 4, & de l'ordonnée : *lisez* & à l'ordonnée.

P. 145, *l.* 7, ou il : *lisez* ou elle.

P. 147, *l.* 4, *FEV* : lisez *FDV*.

P. 153, *l.* 1, *APr* : lisez *AGr*.

